Plus grand commun diviseur (pgcd) Théorèmes de Bézout et de Gauss

Table des matières

1 Plus grand commun diviseur (pgcd)

1.1 Définition

Définition 1 : Soit a et b deux entiers relatifs non tous nuls.

L'ensemble des diviseurs communs à a et b admet un plus grand élément d, appelé plus grand commun diviseur.

On note : $d = \text{pgcd}(a, b)$

Remarque : On note aussi $\text{pgcd}(a, b) = a \wedge b$.
Cette notation est plutôt réservé dans l'enseignement supérieur.

Démonstration : Existence et unicité

L'ensemble des diviseurs communs à a et b est un ensemble fini car intersection de deux ensembles dont l'un au moins est fini (non tous nuls).
L'ensemble des diviseurs communs à a et b est non vide car 1 divise a et b.
Or tout ensemble fini non vide admet un plus grand élément donc d existe.

Exemples : $\text{pgcd}(24, 18) = 6$, $\text{pgcd}(60, 84) = 12$, $\text{pgcd}(150, 240) = 30$

Propriété 1 : Propriétés du pgcd

- $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, a)$.
- $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(|a|, |b|)$.
- $\text{pgcd}(a, 0) = |a|$ car 0 est multiple de tout entier.
- Si b divise a alors $\text{pgcd}(a, b) = |b|$
- Pour tout entier naturel k non nul, on a : $\text{pgcd}(ka, kb) = k\,\text{pgcd}(a, b)$.

Exemples : $\text{pgcd}(30, 75) = \text{pgcd}(75, 30)$ et $\text{pgcd}(-24, -18) = \text{pgcd}(24, 18)$
$\text{pgcd}(82, 0) = 82$, $\text{pgcd}(30, 5) = 5$ et $\text{pgcd}(240, 180) = 10\text{pgcd}(24, 18) = 60$.

1.2 Nombres premiers entre eux

Définition 2 : On dit que a et b sont premiers entre eux si et seulement si :

$$\text{pgcd}(a, b) = 1$$

Exemple : $\text{pgcd}(15, 8) = 1$ donc 15 et 8 sont premiers entre eux.

⚠ Il ne faut pas confondre « nombres premiers entre eux » et « nombres premiers ». 15 et 8 ne sont pas premiers et mais sont premiers entre eux.
Par contre deux nombres premiers distincts sont premiers entre eux.

Remarque : Une fraction irréductible q s'écrit :

$$q = \frac{a}{b} \text{ avec } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^* \text{ et } \text{pgcd}(a, b) = 1.$$

1.3 Algorithme d'Euclide

Théorème 1 : Soit a et b deux naturels non nuls tels que b ne divise pas a.

La suite des divisions euclidiennes du diviseur par le reste de la division précédente finit par s'arrêter. Le dernier reste non nul est alors le $\text{pgcd}(a,b)$

$$\begin{array}{lllll}
\text{division de } a \text{ par } b : & a = b\,q_0 + r_0 & \text{avec} & b > r_0 \geqslant 0 \\
\text{division de } b \text{ par } r_0 : & b = r_0\,q_1 + r_1 & \text{avec} & r_0 > r_1 \geqslant 0 \\
\text{division de } r_0 \text{ par } r_1 : & r_0 = r_1\,q_2 + r_2 & \text{avec} & r_1 > r_2 \geqslant 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\text{division de } r_{n-2} \text{ par } r_{n-1} : & r_{n-2} = r_{n-1}\,q_n + r_n & \text{avec} & r_{n-1} > r_n \geqslant 0 \\
\text{division de } r_{n-1} \text{ par } r_n : & r_{n-1} = r_n\,q_{n+1} + 0 & &
\end{array}$$

On a alors $\text{pgcd}(a,b) = r_n$.

Démonstration :

- Montrons que $\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(b,r_0)$ par une double inégalité.

  Soit $D = \text{pgcd}(a,b)$ et $d = \text{pgcd}(b,r_0)$.

  D divise a et b donc D divise toute combinaison linéaire de a et b donc D divise $a - bq_0 = r_0$. D divise b et r_0. Par conséquent $D \leqslant d$.

  d divise b et r_0 donc d divise toute combinaison linéaire de b et r_0 donc d divise $bq_0 + r_0 = a$. d divise a et b. Par conséquent $d \leqslant D$.

  On déduit de ces deux inégalités que $D = d$ soit $\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(b,r_0)$

- La suite des restes : $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_n$ est une suite strictement décroissante dans $\mathbb{N}$ car $r_0 > r_1 > r_2 > \cdots > r_n$.
  D'après le principe de la descente infinie (toute suite strictement décroissante dans $\mathbb{N}$ est finie), il existe alors n tel que $r_{n+1} = 0$ (car tant que le reste est non nul on peut diviser).

- De proche en proche, on en déduit que :

  $$\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(b,r_0) = \cdots = \text{pgcd}(r_{n-2},r_{n-1}) = \text{pgcd}(r_{n-1},r_n)$$

  or r_n divise r_{n-1}, donc $\text{pgcd}(r_{n-1},r_n) = r_n$

  Conclusion : $\text{pgcd}(a,b) = r_n$. Le dernier reste non nul est le pgcd.

Exemple : Déterminer le $\text{pgcd}(4\,539, 1\,958)$.

On effectue les divisions successives suivantes :

$$\begin{array}{l}
4\,539 = 1\,958 \times 2 + 623 \\
1\,958 = 623 \times 3 + 89 \\
623 = 89 \times 7
\end{array}$$

$$\text{pgcd}(4\,539, 1\,958) = 89$$

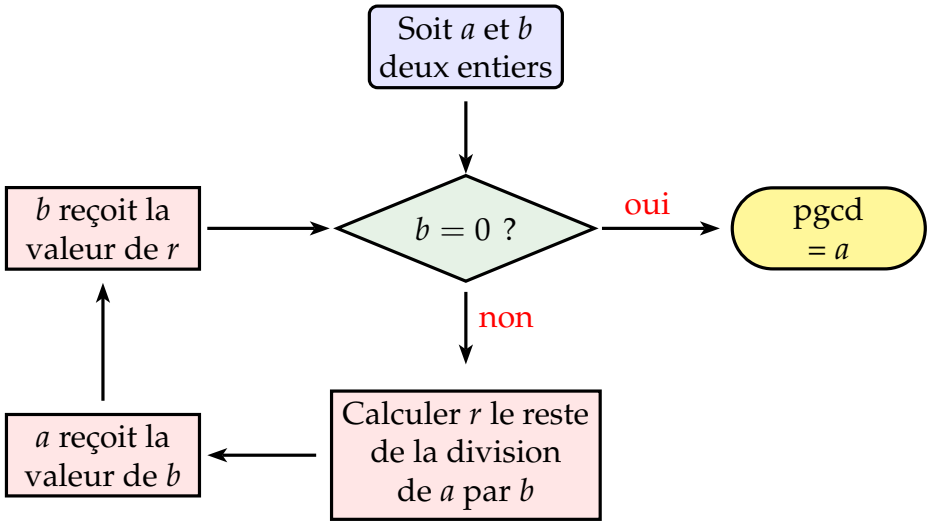
Remarque : Le petit nombre d'étapes montre la performance de cet algorithme.

Algorithme : On crée en Python la fonction pgcd(*a*,*b*) en initialisant le reste.
Par une boucle conditionnelle tant que le reste est non nul, on divise, puis on réactualise les valeurs de a et b.

On obtient alors pour pgcd(4 539, 1 958) : 89

```
def pgcd(a,b):
    r=a%b
    while r!=0:
        while a>=b:
            a=b
            b=r
            r=a%b
    return b
```

L'algorithme d'Euclide peut être présenté sous la forme d'un organigramme (ci-dessous). On pose la question « est-ce que $b = 0$? ». Si oui, le pgcd est égal à a. Si non, on part dans la boucle « non ». On revient à la question avec les nouvelles valeurs de a et b.



2 Théorème de Bézout

2.1 Identité de Bézout

Théorème 2 : Soit a et b deux entiers non nuls et $D = \text{pgcd}(a, b)$
Il existe alors un couple (u, v) d'entiers relatifs tels que : $au + bv = D$.

Démonstration :

Soit G l'ensemble des combinaisons linéaires strictement positives de a et de b.

G n'est pas vide car il contient par exemple $|a|$.

D'après le principe du bon ordre, cet ensemble G admet un plus petit élément $d = au + bv$ avec $d > 0$.
Notons $D = \text{pgcd}(a, b)$ et montrons que $d = D$ par double inégalité.

- D divise a et b donc D divise toute combinaison linéaire de a et de b donc D divise $au + bv = d$ et donc $D \leqslant d$

- Divisons a par d : $a = dq + r$ avec $0 \leqslant r < d$.

  Isolons le reste r et remplaçons d par $au + bv$:
  $r = a - dq = a - (auq + bv)q = a - auq - bvq = a(1 - uq) + b(-vq)$
  Si $r \neq 0$ alors $r \in G$, or d est le plus petit élément de G donc $d \geqslant d$ ce qui est impossible car $r < d$.

  donc $r = 0$ et donc d divise a.
- Par un raisonnement identique, on montre que d divise b.
- d divise a et b donc $d \leqslant D$
- Par double inégalité, on a donc $D = d$.

Théorème 3 : Conséquence de l'identité de Bézout.
Tout diviseur commun à a et b divise $D = \text{pgcd}(a, b)$.

Démonstration : Soit d un diviseur commun à a et b, d divise toute combinaison linaire de a et de b donc d'après l'identité de Bézout, d divise $au + bv = D$.

2.2 Théorème de Bézout

Théorème 4 : Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux **si et seulement si**, il existe un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que : $au + bv = 1$.

Démonstration : Par double implication

- Si $\text{pgcd}(a, b) = 1$, d'après l'identité de Bézout, il existe un couple d'entier relatifs (u, v) tel que $au + bv = 1$
- Réciproquement, il existe un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que : $au + bv = 1$.
  Si $D = \text{pgcd}(a, b)$ alors D divise a et b, donc divise toute combinaison linéaire de a et de b, et donc D divise $au + bv$. D divise 1, donc $D = 1$

Exemple : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2n + 1)$ et $(3n + 2)$ sont premiers entre eux.

Soit $D = \text{pgcd}(2n + 1, 3n + 2)$. D divise $(2n + 1)$ et $(3n + 2)$ donc D divise toute combinaison linéaire de $(2n + 1)$ et $(3n + 2)$. D divise alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$-3(2n + 1) + 2(3n + 2) = -6n - 3 + 6n + 4 = 1$$

D'après le théorème de Bézout $(2n + 1)$ et $(3n + 2)$ sont premiers entre eux.

2.2.1 Déterminer un couple d'entiers de Bézout

Montrer que 59 et 27 sont premiers entre eux puis déterminer un couple (x, y) tel que : $59x + 27y = 1$

Pour montrer que 59 et 27 sont premiers entre eux on effectue l'algorithme d'Euclide et pour déterminer un couple (x, y), on remonte l'algorithme d'Euclide :

$$59 = 27 \times 2 + 5 \quad (L_1)$$
$$27 = 5 \times 5 + 2 \quad (L_2)$$
$$5 = 2 \times 2 + 1 \quad (L_3)$$

59 et 27 sont premiers entre eux.

On remonte l'algorithme d'Euclide de L_3 jusqu'à l'égalité L_1 :

de (L_3) : $2 \times 2 = 5 - 1 \quad (L_4)$

$(L_2) \times 2$: $27 \times 2 = 5 \times 10 + \underbrace{2 \times 2}_{L_4}$

$$27 \times 2 = 5 \times 10 + 5 - 1$$
$$27 \times 2 = 5 \times 11 - 1$$
$$5 \times 11 = 27 \times 2 + 1 \quad (L_5)$$

$(L_1) \times 11$: $59 \times 11 = 27 \times 22 + \underbrace{5 \times 11}_{L_5}$

$$59 \times 11 = 27 \times 22 + 27 \times 2 + 1$$
$$59 \times 11 = 27 \times 24 + 1$$

Donc $59 \times 11 + 27 \times (-24) = 1$

Le couple d'entiers de Bézout est donc $(11, -24)$

2.2.2 Algorithme de Bézout

Algorithme : La fonction Python bezout(a,b), avec $a > 0$ et b premiers entre eux, détermine un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que :

$$au + bv = 1 \quad \Leftrightarrow \quad au = b(-v) + r$$

La fonction teste, en incrémentant u, le reste, r, de la division de au par b si $b > 0$ et par $(-b)$ si $b < 0$. Tant que $r \neq 1$, on réitère la division.

Une fois u trouvé, on détermine $v = \dfrac{1 - au}{b}$.

besout(59,27) donne bien $u = 11$ et $v = -24$

```
def bezout(a,b):
    r=0
    u=0
    while r!=1:
        u+=1
        if b>0:
            r=a*u%b
        else:
            r=a*u%(-b)
    y=int((1-a*u)/b)
    return u,v
```

2.3 Corollaire de Bézout

Théorème 5 : L'équation $ax + by = c$ admet des solutions entières si et seulement si c est un multiple du pgcd(a, b).

Démonstration : Par double implication

- $ax + by = c$ admet une solution (x_0, y_0).
  Comme $D = \text{pgcd}(a, b)$ divise a et b, D divise toute combinaison linéaire de a et de b, donc D divise $ax_0 + by_0 = c$.
- Réciproquement c est un multiple de $D = \text{pgcd}(a, b)$.
  Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $c = kD$. D'après l'identité de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $au + bv = D$.
  En multipliant par k, on obtient : $auk + bvk = kD \Leftrightarrow a(uk) + b(vk) = c$.
  Il existe donc $x_0 = uk$ et $y_0 = vk$ tels que $ax_0 + by_0 = c$

Exemple : $4x + 9y = 2$ admet des solutions car pgcd$(4, 9) = 1$ et 2 multiple de 1.

$9x - 15y = 2$ n'admet pas de solution car pgcd$(9, 15) = 3$ et 2 non multiple de 3.

3 Le théorème de Gauss

3.1 Le théorème

Théorème 6 : Soit a, b et c trois entiers relatifs non nuls.

Si a divise le produit bc et si a et b sont premiers entre eux alors a divise c.

Démonstration : Par le théorème de Bézout.

- a divise bc, alors il existe un entier k tel que : $bc = ka$
- a et b sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers u et v tels que : $au + bv = 1$ (Eq)
- Eq $\times c$: $acu + bcv = c \overset{bc=ka}{\Leftrightarrow} acu + kav = c \Leftrightarrow a(cu + kv) = c$
  Donc a divise c.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $5(x-1) = 7y$

5 divise $7y$, or $\text{pgcd}(5,7) = 1$, d'après le théorème de Gauss 5 divise y. On a donc : $y = 5k$. En remplaçant dans l'équation, on a :

$$5(x-1) = 7 \times 5k \Leftrightarrow x - 1 = 7k \Leftrightarrow x = 7k + 1$$

Les solutions sont donc de la forme : $\begin{cases} x = 7k+1 \\ y = 5k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

3.2 Corollaire du théorème de Gauss

Théorème 7 : Si b et c, premiers entre eux, divise a alors bc divise a.

Démonstration : :
b et c divise a, alors il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que : $a = kb$ et $a = k'c$
On a alors $kb = k'c$, donc b divise $k'c$, or $\text{pgcd}(b,c) = 1$, d'après le théorème de Gauss, b divise k' donc il existe $k'' \in \mathbb{Z}$ tel que : $k' = k''b$
On a alors : $a = k'c = k''bc$. bc divise a.

Exemple : Si 5 et 12 divise a comme $\text{pgcd}(5,12) = 1$, d'après le corollaire du théorème de Gaus $5 \times 12 = 60$ divise a.

3.3 Équations diophantiennes

Définition 3 : Une équation diophantienne est une équation polynomiale à coefficients entiers dont on cherche les solutions parmi les nombres entiers.

Une équation diophantienne du 1er degré est de la forme : $ax + by = c$.
D'après le corollaire du théorème de Bézout, une telle équation admet des solutions si, et seulement si, c est un multiple de $\text{pgcd}(a,b)$.

Remarque : Diophante d'Alexandrie, mathématicien grec du IIIe siècle.

Méthode pour résoudre une équation du type : $ax + by = c$

- On cherche une solution particulière à l'équation.
- On recherche ensuite l'ensemble des solutions en soustrayant terme à terme l'équation et l'égalité de la solution particulière.
- On applique le théorème de Gauss puis l'on vérifie que les solutions trouvées vérifient bien l'équation.

⚠ La vérification est essentielle car on raisonne par implication.

Exemple : Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E) $17x - 33y = 1$.

- On cherche une solution particulière de (E).
  Solution évidente (2,1) : $17 \times 2 - 33 \times 1 = 34 - 33 = 1$.
- Soit (x, y) une solution (E).

  On a : $\begin{cases} 17x - 33y = 1 \\ 17(2) - 33(1) = 1 \end{cases}$ par soustraction terme à terme, on obtient :

  $$17(x-2) - 33(y-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 17(x-2) = 33(y-1) \quad (\text{E}')$$

  33 divise $17(x-2)$ or $\text{pgcd}(17, 33) = 1$, d'après le théorème de Gauss, 33 divise $(x-2)$. On a donc : $x - 2 = 33\,k$, $k \in \mathbb{Z}$.

  En remplaçant dans (E'), on trouve $y - 1 = 17\,k$.
- Les solutions de (E) sont de la forme : $\begin{cases} x = 2 + 33\,k \\ y = 1 + 17\,k \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$
- Vérification : $17(2 + 33k) - 33(1 + 17k) = 34 + 561k - 33 - 561k = 1$

Remarque : Si l'on cherche à résoudre (E_1) $17x - 33y = 5$

- On trouve une solution particulière on multipliant la solution particulière de (E) par 5, soit $5(2, 1) = (10, 5)$.
- La solution générale sera alors : $\begin{cases} x = 10 + 33\,k \\ y = \ \ 5 + 17\,k \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$