

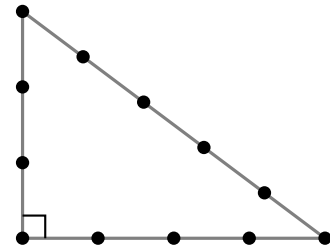
Les triplets pythagoriciens

1 Définition

Définition 1 : On dit que trois nombres a , b et c entiers naturels forment un triplet pythagoricien s'ils vérifient la relation : $a^2 + b^2 = c^2$.

Remarque : Rechercher des triplets pythagoriciens revient à chercher des triangles rectangles dont les côtés sont des nombres entiers. Le plus connu des triplets pythagoriciens est $(3; 4; 5)$, connu depuis l'Antiquité et utilisé par les architectes égyptiens pour tracer des angles droits.

On utilise une corde à nœuds : sur une corde fermée, on place 12 nœuds régulièrement espacés. On peut ainsi reconstituer le triangle rectangle $(3; 4; 5)$, et fabriquer ainsi une équerre de poche pliable !



2 Restriction de la recherche

2.1 Triplets irréductibles

Théorème 1 : Si $(a; b; c)$ est un triplet pythagoricien alors, pour tout entier naturel n , $(na; nb; nc)$ est aussi un triplet pythagoricien.

Démonstration : Immédiate, cela revient à multiplier l'égalité d'origine par n^2

Remarque : $(6; 8; 10)$ et $(27; 36; 45)$ sont obtenus en multipliant $(3; 4; 5)$ respectivement par 2 et 9. Ce sont donc des triplets pythagoriciens.

Théorème 2 : Si deux des trois nombres composant un triplet pythagoricien ont un diviseur commun d , alors d divise aussi le troisième nombre.

Démonstration : En effet, supposons que d soit un diviseur commun à a et b : il existe alors deux entiers, a' et b' tels que $a = da'$ et $b = db'$.

Alors $c^2 = a^2 + b^2 = d^2(a'^2 + b'^2)$. Donc d^2 divise c^2 , et donc d divise c .

Par un raisonnement similaire si d est un diviseur commun à a et c , ou b et c , on montre que d divise respectivement b ou a .

Supposons que a et b soient premiers entre eux, alors a et c sont premiers entre eux. Sinon on pourrait trouver un diviseur commun $d \neq 1$ à a et c , qui diviserait alors b , ce qui est absurde puisque a et b sont supposés être premiers entre eux.

Théorème 3 : Tout triplet pythagoricien peut se ramener à un triplet pythagoricien "réduit", où a , b et c sont premiers entre eux deux à deux. Il suffit même que deux d'entre-eux le soient.

Remarque : On se limitera donc à l'étude des triplets pythagoriciens (a, b, c) , avec a , b et c premiers entre eux deux à deux. Un tel triplet est appelé **triplet irréductible**.

2.2 Étude de la parité

Soit (a, b, c) un triplet pythagoricien irréductible. Étudions d'abord la parité de a , b et c .

- Ces trois nombres ne peuvent pas être tous pairs car ils sont premiers entre eux deux à deux.
- Pour la même raison, il ne peut pas y avoir deux nombres pairs (et un impair) : cela est immédiat, puisque a , b et c sont premiers entre eux deux à deux.
- Prouvons que les trois nombres ne peuvent pas être tous impairs :

Si a et b sont impairs, a^2 et b^2 sont donc impairs, donc $a^2 + b^2 = c^2$ est pair. Donc c est pair.

De même si a et c sont impairs, a^2 et c^2 sont impairs, donc $b^2 = c^2 - a^2$ est pair. Donc b est pair.

Conclusion : deux des nombres sont impairs, et le troisième pair.

- Prouvons que c est impair.
Supposons que a et b soient impairs (et donc c pair) : il existe donc deux entiers a' et b' tels que $a = 2a' + 1$ et $b = 2b' + 1$.

Alors $c^2 = a^2 + b^2 = (2a' + 1)^2 + (2b' + 1)^2 = 4(a'^2 + a' + b'^2 + b') + 2$.

Donc $c^2 \equiv 2 \pmod{4}$. Or c est pair et donc $c^2 \equiv 0 \pmod{4}$, ce qui est contradictoire.

Donc a et b sont de parités différentes, et c est impair. On appelle alors b le nombre pair, et a et c les nombres impairs.

Conclusion : On étudie les triplets irréductibles (a, b, c) . Ces trois nombres sont premiers deux à deux; si de plus a et c sont impairs et b est pair, on dira que le triplet est **irréductible et rangé**.

Remarque : Cette façon de ranger les trois nombres d'un triplet, au détriment possible de leur ordre relatif, permet de "standardiser" les propriétés à venir : en particulier, nous noterons $(15; 8; 17)$ plutôt que $(8; 15; 17)$.

3 Détermination de tous les triplets irréductibles

Théorème 4 : Soit a, b et c trois nombres entiers. $(a; b; c)$ est un triplet pythagoricien irréductible rangé **si, et seulement si**, il existe deux nombres u et v avec $u > v$, de parités différentes et premiers entre eux, tels que :

$$a = u^2 - v^2 \quad , \quad b = 2uv \quad , \quad c = u^2 + v^2$$

Démonstration :

- **Dans le sens direct.** Soit donc $(a; b; c)$ un triplet pythagoricien irréductible rangé. Dans un tel triplet, b est pair : posons alors $b = 2p$. On a donc :

$$c^2 - a^2 = 4p^2 \quad \text{soit} \quad (c + a)(c - a) = 4p^2$$

a et c étant impairs, $c + a$ et $c - a$ sont donc tous les deux pairs.

Posons donc :
$$\begin{cases} c + a = 2q \\ c - a = 2r \end{cases} \quad \text{où } q \text{ et } r \text{ sont des entiers naturels non nuls.}$$

De ces égalités, on tire : $a = q - r$ et $c = q + r$.

D'autre part, $c^2 - a^2 = (c + a)(c - a) = 4qr = 4p^2$ donc $p^2 = qr$.

Montrons que q et r sont des carrés d'entiers naturels.

- 1) Tout d'abord, ils sont premiers entre eux. En effet, tout diviseur premier commun à q et r diviserait leur somme $q + r = c$, et leur différence $q - r = a$ qui sont eux-mêmes premiers entre eux.
- 2) Par conséquent, chaque diviseur premier de $p^2 = qr$ ne peut donc diviser à la fois q et r ; comme p^2 est un carré, l'exposant de ce diviseur premier est pair dans celui des deux nombres où ce diviseur premier figure. Il en résulte que q et r sont effectivement des carrés d'entiers naturels, puisque chacun de leurs diviseurs premiers a un exposant pair.

medskip

Conclusion : On a donc $q = u^2$ et $r = v^2$, d'où $a = u^2 - v^2$ et $c = u^2 + v^2$. d'autre part, on sait que $b = 2p$ avec $p^2 = qr = u^2v^2$, on a alors $b = 2uv$.

Vérifions maintenant que les nombres u et v remplissent les conditions du théorème.

Comme $a = q - r > 0$, on a $q > r$ donc $u > v$. u et v ne sont pas de même parité sinon $u^2 - v^2 = a$ serait pair, ce qui n'est pas le cas avec un triplet rangé.

Comme q et r sont premiers entre eux, il en est de même de u et v .


- **Réciproquement**, avec les valeurs proposées pour a, b et c , on a :

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2 \\ &= u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = (u^2 + v^2)^2 = c^2 \end{aligned}$$

Comme u et v sont de parité différente, il en est de même de leur carré, ce qui prouve que a et c sont bien impairs.

Si a et c avaient un diviseur premier commun, ce diviseur diviserait $a + c = 2u^2$ et $c - a = 2v^2$. Comme ce diviseur premier ne peut pas être 2 (a et c sont impairs), il diviserait u^2 et v^2 et donc u et v , ce qui est impossible puisque u et v sont premiers entre eux.

4 Algorithme : liste des triplets pythagoriciens

On peut écrire une fonction `triplet(n)` en Python  permettant de dresser une liste des triplets pythagoriciens jusqu'à une valeur n de u . Pour une valeur de u , on détermine les valeurs de v possibles, pour que u et v soient de parités différentes et premiers entre eux. On détermine alors le triplet pythagoricien correspondant. On définit auparavant la fonction `pgcd(a,b)`.

On trouve le tableau pour `triplet(9)`

u	v	a	b	c
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	2	21	20	29
5	4	9	40	41
6	1	35	12	37
6	5	9	60	61
7	2	45	28	53
7	4	33	56	65
7	6	13	84	85
8	1	63	16	65
8	3	55	48	73
8	5	39	80	89
8	7	15	112	113
9	2	77	36	85
9	4	65	72	97
9	8	17	144	145

```
def pgcd(a, b):
    r=a%b
    while r!=0:
        a=b
        b=r
        r=a%b
    return b

def triplet(n):
    L1=[];L2=[];L3=[];L4=[];L5=[]
    for u in range(2, n+1):
        if u%2==0:
            v=1
        else:
            v=2
        while v<u:
            if pgcd(u, v)==1:
                L1.append(u)
                L2.append(v)
                L3.append(u**2-v**2)
                L4.append(2*u*v)
                L5.append(u**2+v**2)
                v+=2
            else:
                v+=2
    return L1, L2, L3, L4, L5
```