Matrices et suites

Table des matières

Introduction

La but de ce chapitre et du suivant est d'introduire un nouvel outil permettant de résoudre quelques problèmes concrets liés à des variables discrètes. Il s'agit de mettre en évidence la pertinence d'introduire les matrices dans la modélisation de problèmes liés aux sciences économiques et sociales, aux sciences de la vie et de la Terre, à la physique, à l'"informatique ....

Les matrices, en tant que tableaux, sont apparues il y a longtemps dans la résolution de systèmes d'équations linéaires à l'aide du déterminant, puis aux transformations géométriques (translation, rotation, symétrie, ...). Mais ce n'est qu'au milieu du XIX^{e} siècle avec Sylvester qui donne le nom de matrice à ces tableaux puis avec Cayley qui définit les opérations usuelles, dans un traité sur les transformations géométriques que le calcul matricielle a pris toute sa dimension révolutionnaire. Enfin en 1913, Cullis utilise pour la première fois la notation entre parenthèse.

1 Matrice

1.1 Définition

Définition 1 : Une matrice $\mathbf{A}$ de dimension $n \times p$ à termes dans $\mathbb{R}$ est un tableau de réels de n lignes et p colonnes. On note alors :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{ou simplement } \mathbf{A} = (a_{ij})$$

a_{ij} est le coefficient de $\mathbf{A}$ situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j.

$\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrice de dimension $n \times p$.

Remarque : Il est d'usage d'utiliser i pour l'indice ligne et j pour l'indice colonne.

Exemple : Soit $\mathbf{A}$ matrice (2×3) définie par : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & 3 & -1 \end{pmatrix}$

On a par exemple les coefficients $a_{21} = 4$ et $a_{13} = 0$

1.2 Matrices particulières

- $n = 1$, matrice ligne : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$
- $p = 1$, matrice colonne : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$
- $n = p$, matrice carrée d'ordre n : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

  Sa diagonale principale a comme coefficients 4 et -2.
  L'ensemble des matrices carrées d'ordre n est noté : $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

- Une matrice carrée est symétrique si $\forall i, j \quad a_{ij} = a_{ji}$: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- La matrice identité ou unité d'ordre n, notée $\mathbf{I}_n$, est la matrice carrée d'ordre n qui possède des "1" sur sa diagonale principale et des "0" ailleurs : $\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Une matrice diagonale d'ordre n est une matrice carrée d'ordre n qui ne possède des éléments non nuls que sur sa diagonale principale : $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

1.3 Opération sur les matrice

1.3.1 Addition et produit par un scalaire (réel)

Définition 2 : Soit $\mathbf{A} = (a_{ij})$ et $\mathbf{B} = (b_{ij})$ de même dimension et k un réel.

- L'addition $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ est la matrice $\mathbf{C} = (c_{ij})$ telle que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- Le produit $k\mathbf{A}$ est la matrice $\mathbf{C} = (c_{ij})$ telle que $c_{ij} = ka_{ij}$

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ et $2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 8 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Remarque : L'addition et le produit par un scalaire sont identiques à celles utilisées par les vecteurs. Les matrices et les vecteurs ont donc une même structure appelée : espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1.3.2 Transposition d'une matrice

Définition 3 : La transposée d'une matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ de dimension $n \times p$ est la matrice, notée $\mathbf{A}^T = (c_{ij})$, de dimension $p \times n$ telle que $c_{ij} = a_{ji}$.

Exemple : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Remarque : $\mathbf{A}$ symétrique, si et seulement si, $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$

1.3.3 Produit de deux matrices

Définition 4 : Soit $\mathbf{A} = (a_{ij})$ de dim. $n \times p$ et $\mathbf{B} = (b_{ij})$ de dim. $p \times q$.

Le produit $\mathbf{AB}$ est la matrice $\mathbf{C} = (c_{ij})$ de dim. $n \times q$ telle que : $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$

Remarque : c_{ij} correspond au produit scalaire de la ligne i avec la colonne j.

Exemple : matrice(2×3) matrice(3×2) = matrice(2×2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 2 + 0 \times 3 & 1 \times 1 + 2 \times 3 + 0 \times 5 \\ 4 \times 5 + 3 \times 2 - 1 \times 3 & 4 \times 1 + 3 \times 3 - 1 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 23 & 8 \end{pmatrix}$$

Propriété 1 : Le produit de deux matrices est :

- associatif : $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{ABC}$
- distributif par rapport à l'addition : $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
- non commutatif : $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ en général.

1.4 Inversion d'une matrice

1.4.1 Définition

Définition 5 : Une matrice carrée $\mathbf{A}$ d'ordre n est inversible si, et seulement si, il existe une matrice carrée d'ordre n, appelée matrice inverse $\mathbf{A}^{-1}$, telle que :

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$$

Si $\mathbf{A}^{-1}$ n'existe pas, on dit que la matrice $\mathbf{M}$ est singulière

Exemple : Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

$$\mathbf{AB} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4+6 & 12-12 \\ -2+2 & 6-4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4+6 & -3+3 \\ 8-8 & 6-4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_2 \iff \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

1.4.2 Condition pour qu'une matrice d'ordre 2 soit inversible

Définition 6 : Le déterminant de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est le nombre réel noté :

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Exemple : Pour $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, on a : $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \times 1 - 3 \times 2 = -2$

Théorème 1 : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

On a alors : $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Remarque : Pour se rappeler cette formule, on retiendra que l'on permute les coefficients de la diagonale principale et que l'on prend les coefficients opposés de la seconde diagonale.

Démonstration :

Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On cherche $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telle que : $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_2$

$\mathbf{AB} = \mathbf{I}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Par identification on a les systèmes : $\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} ay + bt = 0 \\ cy + dt = 1 \end{cases}$

Ces systèmes admettent des solutions si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ donc si $\det(\mathbf{A}) \neq 0$

Par combinaison linéaire, on obtient les solutions suivantes :

$$x = \frac{d}{ad - bc} \quad , \quad z = \frac{-c}{ad - bc} \quad , \quad y = \frac{-b}{ad - bc} \quad , \quad t = \frac{a}{ad - bc}$$

On obtient $\mathbf{B} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. On vérifie ensuite que $\mathbf{BA} = \mathbf{I}_2$.

Exemple : Déterminer la matrice inverse de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ donc $\mathbf{A}$ est inversible.

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 & 1,5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

On retrouve la matrice $\mathbf{B}$ de l'exemple du paragraphe 1.5.2

1.5 Puissance n-ième d'une matrice carrée d'ordre 2 ou 3

Définition 7 : On définit la puissance n-ième d'une matrice carrée $\mathbf{A}$ d'ordre p :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{AA}\ldots\mathbf{A}}_{n \text{ facteurs}} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_p$$

Exemple : On donne $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathbf{A}^2$ et $\mathbf{A}^3$

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 21 & 6 \end{pmatrix}$$

On donne $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. A l'aide de la calculatrice, calculer $\mathbf{B}^2$, $\mathbf{B}^3$ et $\mathbf{B}^{-1}$.

Pour la TI 83, on édite la matrice en donnant la dimension (ici 3×3) puis on rentre les coefficients ligne par ligne. On quitte, puis on sélectionne la matrice et on l'élève à la puissance 2, 3 et -1 pour la matrice inverse. On obtient alors :

$$\mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 13 & 15 & 8 \\ 11 & 13 & 12 \\ 13 & 13 & 10 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}^3 = \begin{pmatrix} 74 & 80 & 62 \\ 74 & 84 & 58 \\ 71 & 82 & 62 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -1 & 7 & -4 \\ -1 & -5 & 8 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Remarque : Certaines matrices sont bien adaptées pour calculer la puissance n-ième. C'est le cas des matrices diagonales. En effet, pour trouver la puissance n-ième d'une matrice diagonale, il suffit d'élever à la puissance n les coefficients de la diagonale principale, les autres coefficients restant nuls.

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad \mathbf{D}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^p \end{pmatrix}$$

On montre cette propriété par une récurrence sur n.

1.6 Diagonalisation

Définition 8 : Une matrice carrée $\mathbf{A}$ est diagonalisable s'il existe une matrice carrée $\mathbf{P}$ inversible et une matrice diagonale $\mathbf{D}$ telles que : $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$.
On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{A}^n = \mathbf{PD}^n\mathbf{P}^{-1}$.

Remarque : Dans la pratique les matrices $\mathbf{P}$ et $\mathbf{D}$ seront données, mais il existe un procédé pour les déterminer.

Exemple : On pose $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. On donne $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

1) Montrer que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$
2) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{A}^n = \mathbf{PD}^n\mathbf{P}^{-1}$
3) En déduire $\mathbf{A}^n$

1) On calcule $\mathbf{P}^{-1} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1} &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 12 \\ 1 & 30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 35 & 28 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \end{aligned}$$

2) **Initialisation :** $n = 1$, $\mathbf{A} = \mathbf{PD}^1\mathbf{P}^{-1}$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\mathbf{A}^n = \mathbf{PD}^n\mathbf{P}^{-1}$.

$\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{AA}^n \overset{\text{HR}}{=} \mathbf{APD}^n\mathbf{P}^{-1} \overset{\mathbf{A}=\mathbf{PDP}^{-1}}{=} \mathbf{PD}\,\underbrace{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}}_{=\mathbf{I}_n}\,\mathbf{D}^n\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{PDD}^n\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{PD}^{n+1}\mathbf{P}^{-1}$

La proposition est héréditaire.
Par initialisation est hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{A}^n = \mathbf{PD}^n\mathbf{P}^{-1}$

3) En effectuant le calcul de $\mathbf{PD}^n\mathbf{P}^{-1}$, on trouve :

$$\mathbf{A}^n = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5(-1)^n + 2 \times 6^n & -2(-1)^n + 2 \times 6^n \\ -5(-1)^n + 5 \times 6^n & 2(-1)^n + 5 \times 6^n \end{pmatrix}$$

2 Applications

2.1 Écriture matricielle d'un système linéaire

Théorème 2 : Soit le système (S) linéaire $(n \times n)$ suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

On pose $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$

L'écriture matricielle du système (S) est alors : $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

Si $\mathbf{A}$ est inversible, le système admet une unique solution : $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

Exemple : Soit le système suivant : $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 5x - 4y = 13 \end{cases}$

On a : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix}$.

$\det(\mathbf{A}) = 2(-4) - (-3)(5) = 7 \neq 0$ La matrice $\mathbf{A}$ est inversible.

$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -4+39 \\ -5+26 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 35 \\ 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

2.2 Suite de matrices

Définition 9 : Soit $(\mathbf{U}_n)$ une suite de matrices colonnes de premier terme $\mathbf{U}_0$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{U}_n$ où $\mathbf{A}$ est une matrice carrée.
L'expression de $\mathbf{U}_n$ en fonction de n et de $\mathbf{U}_0$ est alors : $\mathbf{U}_n = \mathbf{A}^n\mathbf{U}_0$

Remarque : La suite $\mathbf{U}_n$ est donc une suite géométrique de matrices colonnes. On la rencontre dans l'évolution d'un système fermé. Pour connaître l'expression de $\mathbf{U}_n$ en fonction de n, on cherchera à diagonaliser la matrice $\mathbf{A}$.

2.2.1 Exemple 1 : système fermé

Dans une enceinte une population d'êtres unicellulaires ne peuvent se trouver que dans deux états A ou B. On désigne par a_n et b_n les effectifs des deux états, en milliers d'individus à l'instant n. On a constaté que 95 % des unicellulaires se trouvant à l'instant n dans l'état A n'ont pas changé d'état à l'instant $n+1$, ainsi que 80 % de ceux se trouvant à l'instant n dans l'état B. L'effectif total est de 500 000 individus. Cet effectif reste constant dans le temps.

1) Déterminer le système donnant a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n

2) Écrire une fonction U(a,n) en Python donnant les populations, en milliers d'individus, des états A et B en fonction de a_0 et n.
Que renvoie la fonction pour (375,30), (50,30), (500,30) ?
Conjecturer l'évolution des populations a_n et b_n sur le long terme.

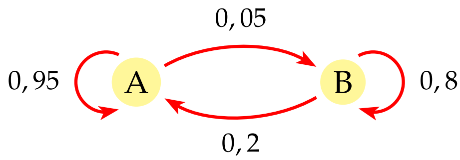
3) a) Traduire le système de la question 1) à l'aide de d'une suite $(\mathbf{U}_n)$ de matrices colonnes. En déduire $\mathbf{U}_n$ en fonction n et de $\mathbf{U}_0$ correspondant à l'état initial.

b) $\begin{pmatrix} 0,95 & 0,2 \\ 0,05 & 0,8 \end{pmatrix}^n = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4+0,75^n & 4-4\times 0,75^n \\ 1-0,75^n & 1+4\times 0,75^n \end{pmatrix}$ par une diagonalisation.

Exprimer a_n et b_n en fonction de n et de a_0. Conclure.

1) On obtient, en observant ce qui rentre en A (a_{n+1}) et ce qui rentre en B (b_{n+1}) :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,95a_n + 0,2b_n \\ b_{n+1} = 0,05a_n + 0,8b_n \end{cases}$$



2) On peut proposer la fonction suivante, en observant que $b_n = 500 - a_n$.

```
def U(a,n):
    b=500-a
    for i in range(n):
        a=0.95*a+0.2*b
        b=500-a
    return a,b
```

On obtient alors :

$U(375,30) = (400,00\,;\,100,00)$

$U(50,30) = (399,94\,;\,100,06)$

$U(500,30) = (400,02\,;\,99,98)$

Sur le long terme, la répartition des populations A et B semble se stabiliser vers la répartition 400 pour A et 100 pour B quelque soit l'état initial.

3) a) On pose $\mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,2 \\ 0,05 & 0,8 \end{pmatrix}$, on a alors : $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{U}_n$.

On a alors : $\mathbf{U}_n = \mathbf{A}^n\mathbf{U}_0$.

b) $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4+0,75^n & 4-4\times 0,75^n \\ 1-0,75^n & 1+4\times 0,75^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4a_0+0,75^n a_0+4b_0-4(0,75^n)b_0 \\ a_0-0,75^n a_0+b_0+4(0,75^n)b_0 \end{pmatrix}$

En remplaçant $b_0 = 500 - a_0$, on obtient alors :

$$a_n = \frac{4}{5}a_0 + \frac{0,75^n}{5}a_0 + 400 - \frac{4}{5}a_0 - 400(0,75^n) + \frac{4(0,75^n)}{5}a_0 = 0,75^n(a_0-400)+400$$

$$b_n = \frac{1}{5}a_0 - \frac{0,75^n}{5}a_0 + 100 - \frac{1}{5}a_0 + 400(0,75^n) - \frac{4(0,75^n)}{5}a_0 = 0,75^n(400-a_0)+100$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,75^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 400$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 100$.

les suites (a_n) et (b_n) convergent, quelque soit l'état initial, vers les valeurs respectives de 400 et 100 soit respectivement 400 000 et 100 000 cellules.

2.2.2 Étude d'une suite $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{U}_n + \mathbf{B}$

On définit la suite de matrices $(\mathbf{U}_n)$ par $\mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{U}_n + \mathbf{B}$

avec $\mathbf{A} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

1) Déterminer la matrice $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ telle que $\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}$

2) On définit la suite de matrices $(\mathbf{V}_n)$ par $\mathbf{V}_n = \mathbf{U}_n - \mathbf{X}$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{V}_n$.

b) En déduire l'expression de $\mathbf{V}_n$ puis de $\mathbf{U}_n$ en fonction $\mathbf{A}$ et de n.

3) On admet que par une diagonalisation on obtient : $\mathbf{A}^n = \dfrac{1}{4^n}\begin{pmatrix} 2^n & 3\times 2^n - 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer l'expression de $\mathbf{U}_n$ en fonction de n puis déterminer sa limite.

1) On a : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{4}(2x+3y)+2 \\ y = \dfrac{1}{4}y+3 \end{cases} \overset{\times 4}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 4x = 2x+3y+8 \\ 4y = y+12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ 2x = 3y+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 4 \end{cases}$$

2) a) $\mathbf{V}_{n+1} = \underbrace{\mathbf{U}_{n+1}}_{\mathbf{A}\mathbf{U}_n+\mathbf{B}} - \underbrace{\mathbf{X}}_{\mathbf{A}\mathbf{X}+\mathbf{B}} = \mathbf{A}\mathbf{U}_n + \mathbf{B} - \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{U}_n - \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{A}(\underbrace{\mathbf{U}_n - \mathbf{X}}_{=\mathbf{V}_n}) = \mathbf{A}\mathbf{V}_n$

b) $\mathbf{V}_0 = \mathbf{U}_0 - \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix}$

On a alors : $\mathbf{V}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{V}_0$ donc $\mathbf{U}_n = \mathbf{V}_n - \mathbf{X} = \mathbf{A}^n \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3) $\mathbf{U}_n = \mathbf{V}_n - \mathbf{X} = \mathbf{A}^n \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4^n} \begin{pmatrix} 2^n & 3\times 2^n - 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{4^n} \begin{pmatrix} -18\times 2^n + 9 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18\times 0,5^n + 9\times 0,25^n + 10 \\ -3\times 0,25^n + 4 \end{pmatrix}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n = \lim 0,25^n = 0$ on en déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \mathbf{X}$

2.3 Transformations géométriques

Théorème 3 : Une transformation f du plan est une bijection du plan dans lui-même qui à un point M associe le point M′ tel que $\mathrm{M}' = f(\mathrm{M})$.

Dans un repère $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé du plan, soit $\mathrm{M}(x\,;\,y)$ et $\mathrm{M}'(x'\,;\,y')$

1) f est la translation de vecteur $\vec{u}(a\,;\,b)$ alors : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

2) Si f n'est pas une translation alors : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{A}$ inversible.

- f est la rotation de centre O et d'angle θ alors : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
- f est l'homothétie de centre O et de rapport k alors : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$
- f est la réflexion d'axe passant par O alors : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

Remarque : Repérer le signe "$-$" dans la matrice de rotation.

Dans une réflexion l'angle θ correspond au double de l'angle que forme l'axe de symétrie avec l'axe des abscisses. On vérifie que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_2 \Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$.

Démonstration : Pour la matrice rotation de centre O et d'angle θ

On a $\mathrm{OM} = \mathrm{OM}' = r$ et $(\overrightarrow{\mathrm{OM}}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{OM}'}) = \theta$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\theta) \\ r\sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{r\cos\alpha}^{x}\cos\theta - \overbrace{r\sin\alpha}^{y}\sin\theta \\ \underbrace{r\sin\alpha}_{y}\cos\theta + \underbrace{r\cos\alpha}_{x}\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$