Matrices et suites

Écriture d'une matrice

EXERCICE 1

Soit la matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ de dimension $n \times p$.
Écrire $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ où $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ est la matrice transposée de $\mathbf{A}$ dans les cas suivants :

1) $n = 2,\ p = 4,\ a_{ij} = 2ij$

2) $n = 2,\ p = 3,\ a_{ij} = j^2 - i$

3) $n = 3,\ p = 3,\ a_{ij} = \dfrac{i}{j}$

4) $n = 4,\ p = 5,\ a_{ij} = 2i - j$

5) $n = 3,\ p = 3,\ a_{ij} = \begin{cases} i & \text{si } i \geqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

6) $n = 3,\ p = 4,\ a_{ij} = \begin{cases} i & \text{si } j \text{ est pair} \\ j & \text{sinon} \end{cases}$

EXERCICE 2

Somme et produit par un réel

On donne deux matrices carrées d'ordre 2 : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer les matrices suivantes :

1) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$

2) $\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$

3) $\dfrac{1}{2}\mathbf{A} + \dfrac{2}{3}\mathbf{B}$

Produit de matrices

EXERCICE 3

Soit les matrices carrées : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer les produits suivants : $\mathbf{AB}$ et $\mathbf{BA}$. Que peut-on conclure ?

EXERCICE 4

Calculer, lorsque cela est possible, les produits de matrices suivants :

1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

EXERCICE 5

On donne la matrice : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbb{R}$

Déterminer le réel x pour que : $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$

EXERCICE 6

Calculer les produits des matrices suivantes puis contrôler avec la calculatrice

1) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 8 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

EXERCICE 7

Déterminer les matrice $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que :

1) $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ 2) $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_2$ 3) $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Utilisation du calcul matriciel

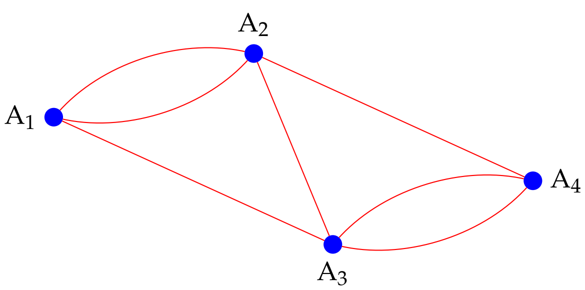
EXERCICE 8

Trois élèves e_1, e_2 et e_3 ont quatre notes de mathématiques n_1, n_2, n_3 et n_4 au cours du premier trimestre . Les notes dans l'ordre sont :
pour e_1 : 8, 12, 16, 10 ; pour e_2 : 13, 15, 19, 14 et pour e_3 : 6, 8, 13, 9.

1) Écrire la matrice $\mathbf{A}$ dont le coefficient a_{ij} représente la note n_i de l'élève e_j.
   Quel est le format de la matrice $\mathbf{A}$?
2) Ces évaluations ont été notées sur 20. Les deux premières sont des interrogations écrites (coef 2), la troisième est un devoir maison (coef 1) et la quatrième est un contrôle (coef 3).
   Exprimer la matrice ligne $\mathbf{B}$ correspondant à la moyenne trimestrielle de mathématiques des élèves e_1, e_2 e_3 à l'aide d'une matrice coefficient $\mathbf{C}$ et de la matrice $\mathbf{A}$.

EXERCICE 9

Les arêtes du graphe ci-contre représentent des pistes de ski de fond mesurant chacune 2 km. Les sommets de ce graphes sont les différents points d'accès à ce domaine skiable



1) Écrire la matrice $\mathbf{M}$ d'ordre 4 dont les coefficients m_{ij} représente le nombre de pistes reliant les accès A_i à A_j pour i et j entiers entre 1 et 4.
2) Calculer $\mathbf{M}^2$ et $\mathbf{M}^3$ à l'aide d'une calculatrice.
3) En déduire le nombre de circuits :
   a) de 4 km reliant A_2 et A_3 ;
   b) de 6 km reliant A_3 à lui-même ;
   c) d'au plus 6 km reliant A_1 et A_4.

Inverse d'une matrice

EXERCICE 10

Déterminer $\mathbf{A}^{-1}$ lorsque cela est possible dans les cas suivants :

1) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

2) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

3) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0,5 & 4 \\ 0,25 & 2 \end{pmatrix}$

4) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0,5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

EXERCICE 11

Résoudre à l'aide d'un calcul matriciel les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ -2x + y = -5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} -6x + 7y = -3 \\ 3x + 14y = -1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = -1 \\ x\sqrt{8} + y\sqrt{27} = 13 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 6x - 9y = 6 \\ x + 3y = \dfrac{7}{6} \end{cases}$

EXERCICE 12

1) Donner à l'aide de la calculatrice la matrice inverse de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2) En déduire la résolution du système : $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y - z = -1 \\ -x + y + z = 5 \end{cases}$

EXERCICE 13

Soit la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 8 \\ 4 & -3 & -8 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $\mathbf{A}^2$. Que peut-on dire de la matrice $\mathbf{A}$?

2) Déterminer alors la matrice $\mathbf{X}$ telle que : $\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

EXERCICE 14

On cherche à déterminer l'équation de la parabole, $y = ax^2 + bx + c$, passant par les points : $\text{P}(1\,;\,4)$, $\text{Q}(-2\,;-5)$, $\text{R}(-1\,;\,0)$

1) Traduire l'appartenance des ces trois points à la parabole par un système (S). En déduire l'écriture de ce système sous la forme matricielle $\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{B}$.

2) Montrer que la matrice : $\mathbf{C} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de $\mathbf{A}$.

3) Calculer alors les coefficients a, b et c

EXERCICE 15

Soit la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

1) Calculer $6\mathbf{A} - \mathbf{A}^2$
2) En déduire que $\mathbf{A}$ est est inversible et que sa matrice inverse, $\mathbf{A}^{-1}$, peut s'écrire sous la forme $\mathbf{A}^{-1} = \alpha \mathbf{I}_2 + \beta \mathbf{A}$ où α et β sont deux réels que l'on déterminera.

EXERCICE 16

Soit les systèmes : (S_1) : $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -x - y + z = -9 \\ -x + 2y - z = 12 \end{cases}$ et (S_2) : $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 2x - 5y - 2z = 2 \\ -x + 2y + z = 1 \end{cases}$

1) Résoudre (S_1) et (S_2) à l'aide de combinaisons linéaires bien choisies.
2) Résoudre (S_1) et (S_2) matriciellement, à l'aide de la calculatrice.
3) Conclure

Diagonalisation

EXERCICE 17

On considère les matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Montrer que la matrice $\mathbf{P}$ est inversible puis déterminer $\mathbf{P}^{-1}$.
2) Montrer que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ est une matrice diagonale $\mathbf{D}$.
3) Déduire une expression de $\mathbf{A}^n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 18

On considère les matrices $\mathbf{A} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -3 \\ 10 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1) À l'aide de la calculatrice, donner $\mathbf{P}^{-1}$.
   On donnera les coefficients de $\mathbf{P}^{-1}$ sous forme de fraction.
2) Vérifier que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ est une matrice diagonale $\mathbf{D}$.
3) En déduire $\mathbf{A}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Suite de matrices

EXERCICE 19

Dans une enceinte une population d'êtres unicellulaires ne peuvent se trouver que dans deux états A ou B. On désigne par a_n et b_n les effectifs des deux états, en milliers d'individus à l'instant n. On a constaté que 95 % des unicellulaires se trouvant à l'instant n dans l'état A n'ont pas changé d'état à l'instant $n+1$, ainsi que 80 % de ceux se trouvant à l'instant n dans l'état B. L'effectif total est de 500 000 individus. Cet effectif reste constant dans le temps.

1) Déterminer le système donnant a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n

2) Écrire une fonction U(a,n) en Python donnant les populations, en milliers d'individus, des états A et B en fonction de a_0 et n.

   Que renvoie la fonction pour (375,30), (50,30), (500,30) ?

   Conjecturer l'évolution des populations a_n et b_n sur le long terme.

3) a) Traduire le système de la question 1) à l'aide de d'une suite $(\mathbf{U}_n)$ de matrices colonnes. En déduire $\mathbf{U}_n$ en fonction n et de $\mathbf{U}_0$ correspondant à l'état initial.

   b) $\begin{pmatrix} 0,95 & 0,2 \\ 0,05 & 0,8 \end{pmatrix}^n = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4+0,75^n & 4-4\times 0,75^n \\ 1-0,75^n & 1+4\times 0,75^n \end{pmatrix}$ par une diagonalisation.

   Exprimer a_n et b_n en fonction de n et de a_0. Conclure.

EXERCICE 20

On étudie l'évolution dans le temps du nombre de jeunes et d'adultes dans une population d'animaux.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note j_n et a_n les nombres d'animaux jeunes et adultes après n années d'observation.
On compte la première année, 200 animaux jeunes et 500 animaux adultes.
Ainsi $j_0 = 200$ et $a_0 = 500$.

On admet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que : $\begin{cases} j_{n+1} = 0,125\, j_n + 0,525\, a_n \\ a_{n+1} = 0,625\, j_n + 0,625\, a_n \end{cases}$

On pose : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$.

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n, $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{U}_n$.

   b) Calculer $\mathbf{U}_1$ et $\mathbf{U}_2$. Les résultats seront arrondis à l'unité près par défaut.

   c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbf{U}_n$ en fonction de $\mathbf{A}^n$ et de $\mathbf{U}_0$.

2) Soit $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -0,25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Montrer que $\mathbf{Q}$ est inversible et calculer $\mathbf{Q}^{-1}$.

   b) Montrer que : $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1}$.

   c) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\mathbf{A}^n = \mathbf{Q}\mathbf{D}^n\mathbf{Q}^{-1}$

3) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 0,3+0,7(-0,25)^n & 0,42-0,42(-0,25)^n \\ 0,5-0,5(-0,25)^n & 0,7+0,3(-0,25)^n \end{pmatrix}$.

   a) En déduire j_n et a_n en fonction de n

   b) Déterminer les limites de (j_n) et (a_n).

   c) Que peut-on en conclure quant à la population d'animaux étudiée ?

EXERCICE 21

Un opérateur A souhaite prévoir l'évolution de nombre de ses abonnés par rapport à son principal concurrent B à partir de 2013.
En 2013, les opérateurs A et B ont chacun 300 000 abonnés.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n et b_n les nombres d'abonnés, en milliers, des opérateurs A et la n-ième année après 2013. Ainsi, $a_0 = 300$ et $b_0 = 300$.

Des observations conduisent à modéliser la situation par la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = 0,7a_n + 0,2b_n + 60 \\ b_{n+1} = 0,1a_n + 0,6b_n + 70 \end{cases}$$

On pose $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1) a) Déterminer $\mathbf{U}_1$.

   b) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{MU}_n + \mathbf{P}$.

2) a) Calculer $(\mathbf{I}_2 - \mathbf{M}) \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   b) En déduire que la matrice $\mathbf{I} - \mathbf{M}$ est inversible et préciser son inverse.

   c) Déterminer la matrice $\mathbf{U}$ telle que $\mathbf{U} = \mathbf{MU} + \mathbf{P}$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathbf{V}_n = \mathbf{U}_n - \mathbf{U}$.

   a) Justifier que, pour tout entier naturel n, $\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{MV}_n$.

   b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{V}_n = \mathbf{M}^n\mathbf{V}_0$.

4) a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{V}_n = \begin{pmatrix} \dfrac{-100}{3} \times 0,8^n - \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \\ \dfrac{-50}{3} \times 0,8^n + \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix}$

   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbf{U}_n$ en fonction de n et en déduire la limite de la suite (a_n).

   c) Estimer le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme.

EXERCICE 22

Œuvre aquatique

Dans un jardin public, un artiste doit installer une œuvre aquatique commandée par la mairie. Cette œuvre sera constituée de deux bassins A et B ainsi que d'une réserve filtrante R.

Au départ, les deux bassins contiennent chacun 100 litres d'eau.

Un système de canalisations devra alors permettre de réaliser, toutes les heures et dans cet ordre, les transferts d'eau suivants :

- dans un premier temps, la moitié du bassin A se vide dans la réserve R ;
- ensuite, les trois quarts du bassin B se vident dans le bassin A ;
- enfin, on rajoute 200 litres d'eau dans le bassin A et 300 litres d'eau dans le bassin B.

Une étude de faisabilité du projet amène à étudier la contenance des deux bassins A et B qui est à prévoir pour éviter tout débordement.

On modélise les quantités d'eau des deux bassins A et B à l'aide de deux suites (a_n) et (b_n) : plus précisément pour tout entier naturel n, on note a_n et b_n les quantités d'eau en centaines de litres qui seront respectivement contenues dans les bassins A et B au bout de n heures. On suppose pour cette étude mathématique que les bassins sont a priori suffisamment grands pour qu'il n'y ait pas de débordement.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbf{U}_n$ la matrice colonne $\mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Ainsi $\mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1) Justifier que, $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{M}\mathbf{U}_n + \mathbf{C}$ où $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,75 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2) On considère la matrice $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   a) Calculer $\mathbf{P}^2$. En déduire que la matrice $\mathbf{P}$ est inversible et préciser sa matrice inverse.

   b) Montrer que $\mathbf{PMP}$ est une matrice diagonale $\mathbf{D}$ que l'on précisera.

   c) Calculer $\mathbf{PDP}$.

   d) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{M}^n = \mathbf{P}\mathbf{D}^n\mathbf{P}$.

On admet par la suite que pour tout $n \in \mathbb{N},\ \mathbf{M}_n = \begin{pmatrix} 0,5^n & 3 \times 0,5^n - 3 \times 0,25^n \\ 0 & 0,25^n \end{pmatrix}$.

3) Montrer que la matrice $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ vérifie $\mathbf{X} = \mathbf{MX} + \mathbf{C}$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la matrice $\mathbf{V}_n$ par $\mathbf{V}_n = \mathbf{U}_n - \mathbf{X}$.

   a) Montrer que tout $n \in \mathbb{N},\ \mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{M}\mathbf{V}_n$.

   b) On admet que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{V}_n = \mathbf{M}^n\mathbf{V}_0$.
   Montrer que : $\forall n,\ \mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} -18 \times 0,5^n + 9 \times 0,25^n + 10 \\ -3 \times 0,25^n + 4 \end{pmatrix}$.

5) a) Montrer que la suite (b_n) est croissante et majorée. Déterminer sa limite.

   b) Déterminer la limite de la suite (a_n).

   c) On admet que la suite (a_n) est croissante. En déduire la contenance des deux bassins A et B qui est à prévoir pour la faisabilité du projet, c'est-à-dire pour éviter tout débordement.

EXERCICE 23

Suite récurrente à deux termes

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 3 \ , \ u_1 = 8 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n. \end{cases}$

1) Calculer u_2 et u_3.

2) Pour $n \geqslant 2$, on veut calculer u_n à l'aide de le fonction en Python suivante :

```python
def u(n):
    a=3
    b=8
    for i in range(...):
        c=a
        a=b
        b=...
    return b
```

a) Compléter cet algorithme.

b) Rentrer cet algorithme et compléter le tableau suivant :

n	7	10	15
u_n			

c) Quelle conjecture peut-on émettre concernant la monotonie de la suite (u_n) ?

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbf{C}_n$ la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

On note $\mathbf{A}$ la matrice carrée d'ordre 2 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{C}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{C}_n$.
Déterminer $\mathbf{A}$ et prouver que, pour tout entier naturel n, $\mathbf{C}_n = \mathbf{A}^n\mathbf{C}_0$.

4) Soit $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $\mathbf{QP}$ puis montrer que $\mathbf{A} = \mathbf{PDQ}$.

b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3 \times 2^n - 2 \times 3^n \end{pmatrix}$

c) En déduire une expression de u_n en fonction de n.

d) La suite (u_n) a-t-elle une limite ?

Matrices et arithmétique

EXERCICE 24

Suite de Fibonacci

On appelle suite de Fibonacci, la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 0 \ , \ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$

On considère la matrice $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $\mathbf{F}^2$ et $\mathbf{F}^3$. On détaillera les calculs.

2) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ non nul : $\mathbf{F}^n = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}$

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que $\mathbf{F}^{2n+2} = \mathbf{F}^{n+2}\mathbf{F}^n$, démontrer que

$$u_{2n+2} = u_{n+2} \times u_{n+1} + u_{n+1} \times u_n.$$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{2n+2} = u_{n+2}^2 - u_n^2$.

4) On donne $u_{12} = 144$.
Démontrer en utilisant la question 3) qu'il existe un triangle rectangle dont les longueurs des côtés sont toutes des nombres entiers, l'une étant égale à 12.
Donner la longueur des deux autres côtés.

EXERCICE 25

Partie A

On considère la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} a_0 = 0,\ a_1 = 1 \\ a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2a_n \end{cases}$

1) Calculer les 9 premiers termes de la suite (a_n) et donner les décompositions en produit de facteurs premiers de a_6 et a_8.

2) Soit $\mathbf{A}$ la matrice définie par : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$.

3) Montrer, par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} a_{n+1} & 2a_n \\ a_n & 2a_{n-1} \end{pmatrix}$.

Partie B

On admet que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \det(\mathbf{A}^n) = (\det \mathbf{A})^n$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = (-2)^{n-1}$

2) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si d est un diviseur positif de a_n et a_{n+1}, alors d est une puissance de 2 puis que a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

Partie C

1) En remarquant que $\mathbf{A}^{n+k} = \mathbf{A}^n\,\mathbf{A}^k$, montrer que pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, n étant non nul, $a_{n+k} = a_{k+1}a_n + 2a_k a_{n-1}$.

2) En déduire que pour tout entier naturel n, a_n divise a_{2n} et a_{3n}.

3) Montrer que a_{24} est divisible par $15\,015 = 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$.

EXERCICE 26

Chiffrement de Hill

On veut coder un bloc de deux lettres selon la procédure suivante :

- Chaque lettre du bloc est remplacée par un entier en utilisant le tableau :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

  On obtient $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où x_1 et x_2 correspondent aux lettres du bloc.

- : On détermine $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tel que : $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

- On détermine ensuite $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases} z_1 \equiv y_1 \ (26) \ \text{ avec } \ 0 \leqslant z_1 \leqslant 25 \\ z_2 \equiv y_2 \ (26) \ \text{ avec } \ 0 \leqslant z_2 \leqslant 25 \end{cases}$
- On associe à $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ un bloc de deux lettres.

1) Coder RE.

2) Soit $x_1,\ x_2,\ x_1',\ x_2' \in [\![0, 25]\!]$ tels que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ sont transformés en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

   a) Montrer que $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \equiv 3x_1' + x_2' \ (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv 5x_1' + 2x_2' \ (26). \end{cases}$

   b) En déduire que $\begin{cases} x_1 \equiv x_1' \ (26) \\ x_2 \equiv x_2' \ (26) \end{cases}$ puis que $\begin{cases} x_1 = x_1' \\ x_2 = x_2' \end{cases}$

3) On souhaite trouver une méthode de décodage pour le bloc DP :

   a) Vérifier que $\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

   b) Calculer $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{C}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.

   c) Calculer $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tels que $\begin{cases} x_1 \equiv y_1 \ (26) \ \text{ avec } \ 0 \leqslant x_1 \leqslant 25 \\ x_2 \equiv y_2 \ (26) \ \text{ avec } \ 0 \leqslant x_2 \leqslant 25 \end{cases}$

   d) Quel procédé général de décodage peut-on conjecturer ?

4) Généralisation : soit z_1 et z_2 associés au codage, on cherche x_1 et x_2.

   Soit y_1' et y_2' tels que $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{C}^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

   Soient x_1 et x_2, tels que : $\begin{cases} x_1 \equiv y_1' \ (26) \ \text{ avec } \ 0 \leqslant x_1 \leqslant 25 \\ x_2 \equiv y_2' \ (26) \ \text{ avec } \ 0 \leqslant x_2 \leqslant 25 \end{cases}$

   Montrer que : $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \equiv z_1 \ (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv z_2 \ (26) \end{cases}$ Conclure.

5) Décoder QC.

EXERCICE 27

Les matrices sont à coefficients entiers. On définit les congruences suivantes :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \ (5) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \equiv x' \ (5) \\ y \equiv y' \ (5) \end{cases}.$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} \ (5) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a \equiv a' \ (5) \ , \ c \equiv c' \ (5) \\ b \equiv b' \ (5) \ , \ d \equiv d' \ (5) \end{cases}.$$

Alice et Bob veulent s'échanger des messages en utilisant la procédure suivante :

- Ils choisissent $\mathbf{M}$ carrée d'ordre 2.
- Leur message initial est écrit en majuscules.
- Chaque lettre est remplacée par $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:
  x est le n° de la colonne et y le n° de la ligne ;
  La lettre T correspond $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

	0	1	2	3	4
0	A	B	C	D	E
1	F	G	H	I	J
2	K	L	M	N	O
3	P	Q	R	S	T
4	U	V	X	Y	Z

Remarque : W est remplacé par VV.

- On calcule $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
- On calcule $\begin{pmatrix} r' \\ t' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \pmod 5$ avec $\begin{cases} 0 \leqslant r' < 5 \\ 0 \leqslant t' < 5 \end{cases}$
- On utilise le tableau pour obtenir la nouvelle lettre correspondant à $\begin{pmatrix} r' \\ t' \end{pmatrix}$.

1) Bob et Alice choisissent la matrice $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

   a) Coder le message « TOPE ».

   b) On pose $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer $\mathbf{PM} \equiv \mathbf{I}_2 \pmod 5$.

   c) On considère $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$ deux matrices d'ordre 2 congrues modulo 5 et $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{Z}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux matrices colonnes congrues modulo 5.
   Montrer alors que les matrices $\mathbf{AZ}$ et $\mathbf{A'Z'}$ sont congrues modulo 5.

   Dans ce qui suit on admet que : $\begin{cases} \mathbf{A} \equiv \mathbf{A} \pmod 5 \\ \mathbf{B} \equiv \mathbf{B}' \pmod 5 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{AB} \equiv \mathbf{A'B'} \pmod 5$

   d) On note $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ deux matrices colonnes.
   Déduire des questions précédentes que si $\mathbf{MX}$ et $\mathbf{Y}$ sont congrues modulo 5 alors les matrices $\mathbf{X}$ et $\mathbf{PY}$ sont congrues modulo 5.

   e) Décoder alors le message « JILON ».

2) On souhaite savoir si la matrice $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ permet de coder un message.

   a) On pose $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que : $\mathbf{RS} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \pmod 5$.

   b) Un message codé par $\mathbf{R}$ peut être décodé s'il existe $\mathbf{T}$ telle que $\mathbf{TR} \equiv \mathbf{I}_2 \pmod 5$.
   Montrer alors que $\mathbf{TRS} \equiv \mathbf{S} \pmod 5$.

   c) En déduire une contradiction et qu'un message codé par $\mathbf{R}$ ne peut être décodé.

Matrice et transformations

EXERCICE 28

Soit le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On donne le point $A(5;3)$.

1) a) Donner la matrice de la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   b) En déduire l'image B de A par la rotation r.
2) a) Donner la matrice de la réflexion s d'axe $y = x$ dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   b) En déduire l'image C de A par la réflexion s.

EXERCICE 29

Soit le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On donne le point $A(3\,;-2\sqrt{3})$.

1) a) Donner la matrice de la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   b) En déduire l'image B de A par la rotation r.
2) a) Donner la matrice de la réflexion s d'axe $y = x$ dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   b) En déduire l'image C de A par la réflexion s.

EXERCICE 30

Soit le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On donne les points $A(-4\sqrt{3}\,;-2)$, $B(7\,;-\sqrt{3})$ et $C(2\,;\,4\sqrt{3})$.

1) Le point B est l'image de A par la rotation r de centre O et d'angle θ. Déterminer l'angle θ en radian. Déduire la matrice de la rotation r
2) Le point C est l'image de A par la réflexion s d'axe d passant par O. Déterminer une équation de la droite d. Déduire la matrice de la réflexion s.

EXERCICE 31

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit l'ensemble E des matrices $\mathbf{M}_a$ telles que : $\mathbf{M}_a = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$.

1) Comment interpréter l'ensemble E de manière géométrique ?
2) a) Montrer que l'ensemble E est stable pour la multiplication, c'est à dire que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, le produit $\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b \in$ E.
   b) Comme interpréter le produit $\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b$ géométriquement ?
3) Montrer que toute matrice de E est inversible. Calculer son inverse et l'interpréter géométriquement.

EXERCICE 32

Rotation et complexe

Soit deux points $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan complexe.
Le point M′ est l'image du point M par la rotation r de centre O et d'angle θ.
On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

1) Donner la matrice de la rotation r dans le plan complexe.
2) Déterminer x' et y' en fonction de x et de y.
3) Développer $(\cos\theta + i\sin\theta)(x + iy)$.
4) En déduire une relation entre les complexes z et z'.