Graphes et chaînes de Markov

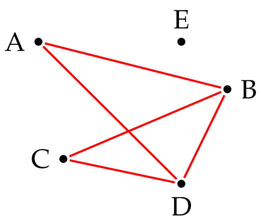
Table des matières

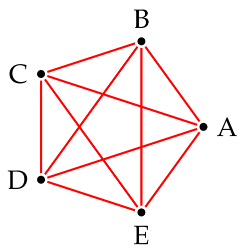
1 Graphes

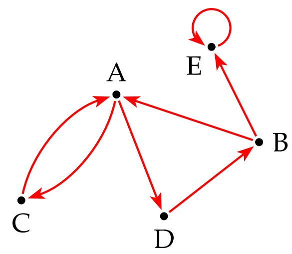
1.1 Définitions

Définition 1 : Éléments d'un graphe

- Un graphe d'ordre n est un ensemble de n points, appelés sommets, relié entre eux par des liens.
- Dans un graphe non orienté, les liens reliant deux sommets se schématisent par un trait, appelé arête, et dans un graphe orienté par une flèche, appelé arc. Un arc qui relie un sommet à lui-même est appelé boucle.
- Deux sommets sont adjacents s'ils sont reliés par une arête ou un arc.
- Un sommet est isolé si aucune arête ou arc ne le relie aux autres sommets
- Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes ou d'arcs dont ce sommet est une extrémité (une boucle comptant pour 2)
- Un graphe est complet si tous les sommets sont adjacents entre eux.







<table>
<tr><td>Nature</td><td>Graphe 1 d'ordre 5
non orienté</td><td>Graphe 2 d'ordre 5
non orienté</td><td>Graphe 3 d'ordre 5
orienté</td></tr>
<tr><td>Degré des sommets</td><td><table><tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>0</td></tr></table></td><td>Graphe complet
Sommets de degré 4</td><td><table><tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td></tr><tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td></tr></table></td></tr>
</table>

Définition 2 : Parcours dans un graphe

- Une chaîne est une liste de sommets telle que chaque sommet de la liste soit adjacent au suivant.
- Un graphe est connexe s'il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe.
- Une chaîne fermée est une chaîne dont l'origine et l'extrémité sont confondues.
- Une chaîne fermée composée d'arêtes toutes distinctes forme un cycle.

Remarque : Dans un graphe orienté, on parle de chemin pour une chaîne et de circuit pour un cycle.

- Graphe 1 : A-B-D-C-B chaîne de longueur 4 ; D-A-B-C-D cycle de longueur 4
- Graphe 3 : A-D-B-E chemin de longueur 3 ; B-A-C-A-D-B circuit de longueur 5

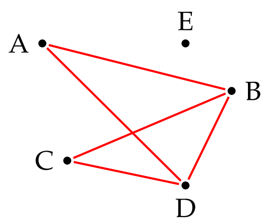
Théorème 1 : Dans un graphe, la somme des degrés de chaque sommet est égale au double du nombre d'arêtes.

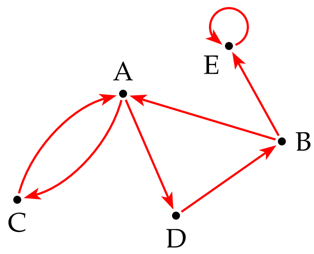
1.2 Matrice d'adjacence

Définition 3 : A tout graphe G d'ordre n, on peut associer une matrice carrée $\mathbf{M} = (a_{ij})$ d'ordre n telle que a_{ij} est le nombre d'arcs ou d'arêtes reliant le sommet i au sommet j.
Cette matrice est appelée matrice d'adjacence du graphe G.

Remarque : La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique.

Exemples :





$$\mathbf{M}_1 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \mathbf{M}_2 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Théorème 2 : Nombre de chemins de longueur p

Soit G un graphe d'ordre n et $\mathbf{M} = (m_{ij})$ sa matrice d'adjacence.
Si on note $\mathbf{M}^p = \left(m_{ij}^{(p)}\right)$, alors $m_{ij}^{(p)}$ est le nombre de chemins de longueur p reliant le sommet i au sommet j.

Démonstration : Montrons par récurrence que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad m_{ij}^{(p)} \text{ nombre de chemins le longueur } p \text{ reliant } i \text{ à } j$$

Initialisation : $p = 1 \quad m_{ij}^{(1)}$ nombre de chemins de longueur 1 reliant i à j par définition de la matrice d'adjacence. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons que $m_{ij}^{(p)}$ nombre de chemins le longueur p reliant i à j.

$$\left(m_{ij}^{(p+1)}\right) = \mathbf{M}^{p+1} = \mathbf{M}\mathbf{M}^p = (m_{ij})\left(m_{ij}^{(p)}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} m_{ik} m_{kj}^{(p)}\right)$$

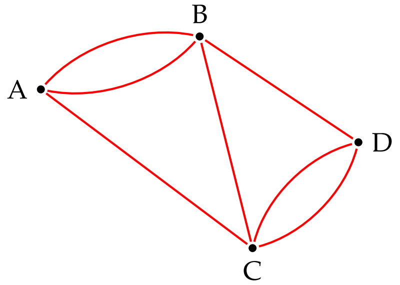
$$\left.\begin{array}{l} m_{ik} \text{ nbre de chemins de longueur 1 reliant } i \text{ à } k \\ m_{kj}^{(p)} \text{ nbre de chemins de longueur } p \text{ reliant } k \text{ à } j \end{array}\right\} \begin{array}{l} m_{ik}m_{kj}^{(p)} \text{ nbre de chemins de longueur} \\ p+1 \text{ reliant } i \text{ à } j \text{ passant par } k \end{array}$$

Par somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_{ik} m_{kj}^{(p)}$ nbre total de chemins de longueur $p+1$ reliant i à j.

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad m_{ij}^{(p)}$ nombre de chemins le longueur p reliant i à j.

Exemple : Les arêtes du graphe ci-contre représentent des pistes de ski de fond mesurant chacune 2 km. Les sommets de ce graphes sont les différents points d'accès à ce domaine skiable.



1) Déterminer la matrice d'adjacence du graphe.
2) Déterminer le nombre de parcours
   a) de 4 km reliant B à C
   b) de 6 km reliant C à lui-même.
   c) d'au plus 6 km reliant A à D.

1) $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, on en déduit $\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{M}^3 = \begin{pmatrix} 4 & 16 & 14 & 5 \\ 16 & 8 & 11 & 14 \\ 14 & 11 & 8 & 16 \\ 5 & 14 & 16 & 4 \end{pmatrix}$

2) a) Parcours de 4 km soit 2 pistes. De $\mathbf{M}^2$ on a 4 parcours reliant B à C
   b) Parcours de 6 km soit 3 pistes. De $\mathbf{M}^3$ on a 8 parcours reliant C à lui-même.
   c) Parcours d'au plus 6 km soit 1, 2 ou 3 piste.
   De $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}^2$ et $\mathbf{M}^3$ on a $0 + 4 + 5 = 9$ parcours d'au plus 6 km reliant A à D

1.3 Graphe pondéré

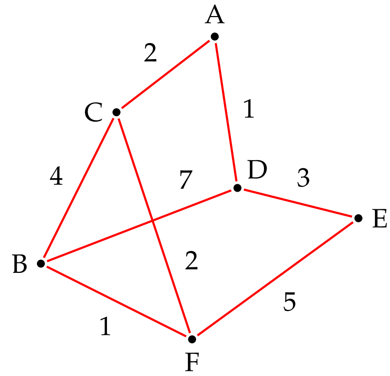
Définition 4 : Parcours dans un graphe pondéré

- Un graphe est pondéré (orienté ou non) lorsque ses arêtes sont affectées de nombres positifs.
- Le poids d'une chaîne est la somme des poids des arêtes qui la composent.

Exemple : Les chaînes reliant B à D :

- A-D de poids 7
- A-C-A-D de poids $4 + 2 + 1 = 7$
- A-F-E-D de poids $1 + 5 + 3 = 8$
- A-F-C-A-D de poids $1 + 2 + 2 + 1 = 6$

La dernière chaîne est la plus courte pour relier A à D.



Remarque : Il existe un algorithme pour déterminer la chaîne la plus courte reliant deux sommets : l'algorithme de Moore-Dijkstra. Mais il est souvent plus rapide sur des graphes simples de le faire de façon artisanale.

2 Chaîne de Markov

2.1 Graphe probabiliste

Définition 5 : Un graphe probabiliste est un graphe orienté pondéré vérifiant :

- Tous les poids appartiennent à l'intervalle $[0\,;\,1]$.
- La somme des poids des chemins issus d'un sommet est égale à 1.

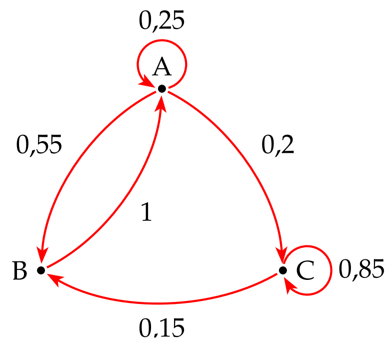
La matrice d'adjacence d'un graphe probabiliste est une matrice stochastique.

Remarque : *stochastique* synonyme d'aléatoire.

On a la matrice d'adjacence suivante :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0.55 & 0,2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$$

La somme des coefficients de chaque ligne vaut 1. C'est une matrice stochastique.



2.2 Chaîne de Markov

Définition 6 : Une chaîne de Markov est une suite de variables aléatoires (X_n) définies sur un même espace probabilisé (où la probabilité est noté p) à valeur dans un ensemble E, appelé « espace des états » et vérifiant la propriété caractéristique :

$$\forall i_0, i_1, \dots, i_{n+1} \in \text{E}, \;\; p_{(X_0=i_0, X_1=i_1, \dots, X_n=i_n)}(X_{n+1} = i_{n+1}) = p_{(X_i=i_n)}(X_{n+1} = i_{n+1})$$

Remarque : Une chaîne de Markov est une suite de variables aléatoires (X_n) tel que la loi de probabilité de X_{n+1} ne dépend uniquement que de X_n.

Si cette chaîne modélise un processus temporel, l'état futur du système, X_{n+1}, ne dépend que de son état présent, X_n, et non des états passés (X_0, X_1, ..., X_{n-1}). Un tel processus est alors qualifié de « processus sans mémoire ».

2.3 Chaîne de Markov homogène

Définition 7 : Une chaîne de Markov est « homogène » si, pour tout $i, j \in \text{E}$, la probabilité $p_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$ ne dépend pas de n. On la note alors p_{ij}.

La matrice $\mathbf{P} = (p_{ij})$ est appelé « matrice de transition » de la chaîne de Markov.

Remarque : Dans le cadre de la modélisation d'un processus en temps discret, dire que la probabilité $p_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$ ne dépend pas de n signifie que la transition de l'état i à l'état j ne dépend pas de l'instant considéré mais seulement du fait d'être dans l'état i.

Propriété 1 : La matrice de transition d'une chaîne de Markov homogène est une matrice stochastique.

À une matrice d'une chaîne de Markov homogène, on peut associer un graphe probabiliste dont les sommets sont les états de l'espace E et les arcs reliant l'état i à l'état j sont affectés des coefficients p_{ij}.

Démonstration : Si l'espace des états E possède N éléments :

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = \sum_{j=1}^{N} p_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j) \overset{\text{homogénéité}}{=} \sum_{j=1}^{N} p_{(X_0=i)}(X_1=j)$$
$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{p\left[(X_0=i)\cap(X_1=j)\right]}{\underbrace{p(X_0=i)}_{\substack{\text{ne dépend pas}\\ \text{de } j}}} = \frac{1}{p(X_0=i)} \underbrace{\sum_{j=1}^{N} p\left[(X_0=i)\cap(X_1=j)\right]}_{\text{proba totales } = p(X_0=i)} = 1$$

Remarque : On pourra définir une chaîne de Markov par un graphe probabiliste.

2.4 Distribution de transition

Théorème 3 : Relation Chapman-Kolmogorov

Soit une chaîne de Markov homogène de $\mathbf{P} = (p_{ij})$ sa matrice de transition.

Si on note $\mathbf{P}^n = \left(p_{ij}^{(n)}\right)$, on a alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$

$$p_{ij}^{(n)} = p_{(X_0=i)}(X_n=j)$$

Remarque : La démonstration est admise. La démonstration par récurrence est basé sur l'homogénéité et l'absence de mémoire qui permet de « jouer » sur les événements qui conditionnent (qu'importe les événements passé).

Théorème 4 : Loi de $\mathbf{X_n}$

L'espace des états est noté : $\mathrm{E} = \{1\,;\,2\,;\,\dots\,;\,N\}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X_n est définie par les N probabilités :

$$p(X_n=1)\ ,\ p(X_n=2)\ ,\ \dots\ ,\ p(X_n=N)$$

Soit π_n la matrice ligne : $\pi_n = \begin{pmatrix} p(X_n=1) & p(X_n=2) & \dots & p(X_n=N) \end{pmatrix}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \pi_{n+1} = \pi_n\,\mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \pi_n = \pi_0\,\mathbf{P}^n$$

Remarque : La loi d'une chaîne de Markov homogène est entièrement donnée par sa distribution initiale π_0 et sa matrice de transition $\mathbf{P}$.

Démonstration : Établissons la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \pi_{n+1} = \pi_n\,\mathbf{P}$

$(X_n = i)_{i\in \mathrm{E}}$ forme une partition de l'univers Ω.

On rappelle que $p_{ij} = p_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j) = \dfrac{p\left[(X_n=i)\cap(X_{n+1}=j)\right]}{p(X_n=i)}$.

Posons $\pi_n\,\mathbf{P} = (q_{1j})$ matrice ligne.

$$q_{1j} = \sum_{i=1}^{n} p(X_n=i)p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} p(X_n=i)p_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p\left[(X_n=i)\cap(X_{n+1}=j)\right]}_{\text{proba totales } = p(X_{n+1}=j)}$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ (q_{1j}) = (p(X_{n+1}=j) = \pi_{n+1}$

2.5 Distribution invariante

Définition 8 : Distribution invariante

Soit une chaîne de Markov homogène (X_n) de matrice de transition $\mathbf{P}$.
π est une distribution invariante si la matrice ligne π vérifie : $\pi\,\mathbf{P} = \pi$

Remarque : π n'existe pas si $(\mathbf{P} - \mathbf{I}_N)$ est inversible car une distribution ne peut correspondre au vecteur nul.

Théorème 5 : Unicité de la distribution invariante.

Soit une chaîne de Markov homogène (X_n) de matrice de transition $\mathbf{P}$ d'ordre N.
Si $\mathbf{P}$ ne possède aucun coefficient non nul autre que sur sa diagonale principale, alors (X_n) admet une unique distribution invariante.

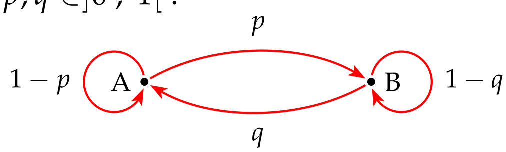
Exemple : Si $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ alors la distribution invariante est $\pi = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Théorème 6 : Soit une chaîne homogène de Markov (X_n) et soit (π_n) la suite de ses distributions.

- Si (π_n) est convergente alors elle converge vers une distribution invariante π.
- Si (X_n) à deux états admet une distribution invariante π, alors quelque soit la distribution initial π_0, la suite (π_n) converge vers π.

Démonstration : Uniquement une chaîne a deux états A et B. On a alors le graphe et la matrice de transition suivants $p, q \in]0\,;\,1[$:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$



Cherchons la distribution invariante $\pi = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix}$ tel que $x \in]0\,;\,1[$

$$\pi = \pi\,\mathbf{P} \ \Rightarrow\ x = x(1-p) + q(1-x) \ \Rightarrow\ x = \frac{q}{p+q}$$

D'où $\pi = \begin{pmatrix} \dfrac{q}{p+q} & \dfrac{p}{p+q} \end{pmatrix}$

Soit une distribution initiale π_0, on a la distribution à l'instant n, $\pi_n = \begin{pmatrix} x_n & 1 - x_n \end{pmatrix}$

$\pi_{n+1} = \pi_n \, \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n(1-p) + q(1-x_n) \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = (1-p-q)x_n + q.$

La suite (x_n) est arithmético-géométrique. On définit la suite $u_n = x_n - \dfrac{q}{p+q}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= x_{n+1} - \frac{q}{p+q} = (1-p-q)x_n + q - \frac{q}{p+q} = (1-p-q)\left[x_n - \frac{q}{p+q}\right] \\ &= (1-p-q)u_n \end{aligned}$$

La suite (u_n) est géométrique de raison $(1-p-q)$.

Or $p, q \in]0\,;\,1[$ donc $-1 < 1 - p - q < 1$.

La suite (u_n) converge alors vers 0 et donc la suite (x_n) converge vers $\dfrac{q}{p+q}$.

La distribution (π_n) converge donc quelque soit l'état initiale π_0 vers π.