Devoir de mathématiques

À rendre le jeudi 8 avril 2021

Exercice 1

Critère d'arrêt **(3 points)**

1) Rappeler le critère d'arrêt pour déterminer si un nombre n est premier ou non.
2) Déterminer, à l'aide du critère d'arrêt, si les nombres 317 et 437 sont premiers ou non. On justifiera clairement le résultat

Exercice 2

Décomposition **(3 points)**

À l'aide de décompositions en facteurs premiers, déterminer $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$$\frac{a}{b} = \frac{5\,292}{5\,544} \quad \text{et} \quad a + b = 903$$

Exercice 3

Nombre de diviseurs **(3 points)**

Déterminer deux entiers naturels a et b tels que $a > b$, $\operatorname{pgcd}(a, b) = 18$, et qui ont respectivement 21 et 10 diviseurs.

Exercice 4

Autour du théorème de Fermat **(6 points)**

1) Soit p un nombre premier impair.
   a) Montrer qu'il existe un entier naturel k, non nul, tel que $2^k \equiv 1\ (p)$.
   b) Soit k un entier naturel non nul tel que $2^k \equiv 1\ (p)$ et soit n un entier naturel. Montrer que, si k divise n, alors $2^n \equiv 1\ (p)$.
   c) Soit b tel que $2^b \equiv 1\ (p)$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété. Montrer, en utilisant la division euclidienne de n par b, que si $2^n \equiv 1\ (p)$, alors b divise n.
2) Soit q un nombre premier impair et le nombre $A = 2^q - 1$. On prend pour p un facteur premier de A.
   a) Justifier que : $2^q \equiv 1\ (p)$.
   b) Montrer que p est impair.
   c) Soit b tel que $2^b \equiv 1\ (p)$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété. Montrer, en utilisant 1) que b divise q. En déduire que $b = q$.
   d) Montrer que q divise $(p - 1)$, puis montrer que $p \equiv 1\ (2q)$.
3) Soit $A_1 = 2^{17} - 1$.
   Voici la liste des nombres premiers inférieurs a 400 et qui sont de la forme $34m + 1$, avec m entier non nul : 103, 137, 239, 307.
   En déduire que A_1 est premier.

Exercice 5

Equation **(5 point)**

On suppose que 250 507 n'est pas premier.
On se propose de déterminer des couples d'entiers naturels $(a\,,\,b)$ vérifiant la relation :

$$(\mathrm{E})\ :\ a^2 - 250\,507 = b^2$$

1) Soit n un entier naturel.
   a) À l'aide d'un tableau de congruence donner les restes possibles de n^2 modulo 9.
   b) (E) est vérifiée, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$.
   c) Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.
2) Vérifier que si le couple $(a\,,\,b)$ vérifie (E), alors $a > 501$.
3) On suppose que le couple $(a\,,\,b)$ vérifie (E).
   a) Démontrer que a est congru à 503 ou à 505 modulo 9.
   b) Déterminer le plus petit entier naturel k tel que $(505 + 9k\,,\,b)$ soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.
4) a) Déduire de la question 3) une écriture de 250 507 en un produit deux facteurs.
   b) Cette écriture est-elle unique ?