Correction du devoir
Du jeudi 18 novembre 2021

EXERCICE 1

Forme algébrique **(2 points)**

1) $z_1 = \dfrac{1}{5+9i} = \dfrac{5-9i}{25+81} = \dfrac{5}{106} - \dfrac{9}{106}i$

2) $z_2 = \dfrac{2-3i}{8+6i} = \dfrac{(2-3i)(8-6i)}{64+36} = \dfrac{16-12i-24i-18}{100} = -\dfrac{1}{50} - \dfrac{9}{25}i$

EXERCICE 2

Équations du premier degré **(4 points)**

1) $-2z+3 = iz+1-i \quad \Leftrightarrow \quad z(-2-i) = -2-i \quad \Leftrightarrow \quad z = 1$

2) $(3+5i)\,z = 1-z \quad \Leftrightarrow \quad (4+5i)z = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = \dfrac{1}{4+5i} = \dfrac{4-5i}{16+25} = \dfrac{4}{41} - \dfrac{5}{41}i$

3) $2z - 2i\,\overline{z} = -5-i \quad \Leftrightarrow \quad 2(z - i\,\overline{z}) = 5-i$, on pose $z = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

$2[x+iy-i(x-iy)] = 5-i \quad \Leftrightarrow \quad 2(x+iy-ix-y) = 5-i \quad \Leftrightarrow \quad 2[x-y+i(-x+y)] = 5-i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-y) = 5 \\ 2(-x+y) = -1 \end{cases}$ impossible pas de solution.

4) $iz + \overline{z} - 3 = 7 - \overline{z} + 5i$, on pose $z = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

$i(x+iy) + x - iy - 3 = 7 - x + iy + 5i \quad \Leftrightarrow \quad ix - y + x - iy + x - iy = 10+5i \quad \Leftrightarrow$

$(2x-y)+i(x-2y) = 10+5i \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y = 10 \\ x-2y = 5 \;\; (\times -2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y = 10 \\ -2x+4y = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad z = 5$

EXERCICE 3

Équations du second degré **(3 points)**

1) $2z^2 - 6z + 5 = 0, \quad \Delta = 36 - 40 = -4 = (2i)^2$ deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{6+2i}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{ou} \quad z_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$$

2) $z^2 + 2\,\overline{z} + 1 = 0$ on pose $z = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. L'équation devient :

$(x+iy)^2 + 2(x-iy) + 1 = 0, \quad \Leftrightarrow \quad (x^2 - y^2 + 2x + 1) + i(2xy - 2y) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0 \;\; (1) \\ 2y(x-1) = 0 \;\; (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2)\;\; y = 0 \\ (1)\;\; x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} (2)\;\; x = 1 \\ (1)\;\; y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y = 0 \\ (x+1)^2 = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad z_1 = -1$ ou $z_2 = 1+2i$ ou $z_3 = 1-2i$

EXERCICE 4

Équations du troisième degré à coefficients complexes **(4 points)**

1) On pose $f(z) = z^3 - (1-i)z^2 + (1-i)z + i$ et $k \in \mathbb{R}$.

$$f(ik) = k^3i^3 - (1-i)k^2i^2 + (1-i)ki + i = -k^3i + (1-i)k^2 + k(i+1) + i$$
$$= k^2 + k + i(-k^3 - k^2 + k + 1) = k(k+1) + i(k+1)(1-k^2)$$

$$f(ik) = 0 \iff \begin{cases} k(k+1) = 0 \\ (k+1)(1-k^2) = 0 \end{cases} \iff k = -1$$

Il n'existe qu'une seule solution imaginaire pure à l'équation (E) : $z_1 = -i$.

2) z_1 racine de f, on peut factoriser par $(z - z_1)$: $f(z) = (z+i)(z^2 + bz + 1)$.

En identifiant le coefficient devant z^2, on obtient : $b + i = -1 + i \iff b = -1$.

$f(z) = 0 \iff (z+i)(z^2 - z + 1) = 0 \iff z_1 = -i$ ou $z^2 - z + 1 = 0$ (2)

(2), $\Delta = 1 - 4 = -3$ deux racines complexes conjuguées :

$$z_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad z_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(E) admet trois solutions z_1, z_2 et z_3.

EXERCICE 5

Ensemble de points **(4 points)**

1) $z' \in \mathbb{R} \iff z' = \overline{z'} \iff \dfrac{iz}{z-i} = \dfrac{-i\bar{z}}{\bar{z}+i} \overset{\div i}{\iff} z(\bar{z}+i) = -\bar{z}(z-i) \iff z\bar{z} + iz = -z\bar{z} + i\bar{z}$

$\iff 2z\bar{z} + i(z - \bar{z}) = 0$, on pose $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$

$\iff 2(x^2+y^2) + i(2iy) = 0 \overset{\div 2}{\iff} x^2 + y^2 - y = 0 \iff x^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

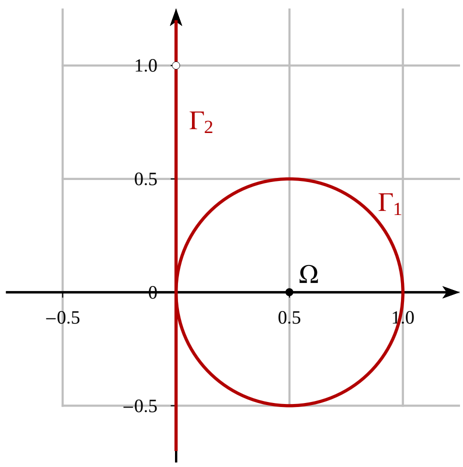
Γ_1 est une cercle de centre $\Omega\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

2) $z' \in i\mathbb{R} \iff z' = -\overline{z'} \iff \dfrac{iz}{z-i} = \dfrac{i\bar{z}}{\bar{z}+i} \overset{\div i}{\iff} z(\bar{z}+i) = \bar{z}(z-i) \iff z\bar{z} + iz = z\bar{z} - i\bar{z}$

$\iff i(z + \bar{z}) = 0 \iff z + \bar{z} = 0 \iff z \in i\mathbb{R}$ et $z \neq i$

Γ_2 est l'axe des ordonnée privé du point d'affixe i.

3) On obtient les ensembles Γ_1 et Γ_2 dans le plan complexe de repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.



EXERCICE 6

Équations du deuxième degré à coefficients complexes **(3 points)**

1) $a^2 = 8(1+i)^2 = 8(1+2i-1) = 16i$.
2) $\Delta = 100 - 4(25-16i) = 100 - 100 + 64i = 4 \times 16i = (2a)^2$

$$z_1 = \frac{-10+2a}{2} = -5+a = -5+2\sqrt{2}+2i\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad z_2 = -5-a = -5-2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}$$