Correction du contrôle

Du jeudi 03 février 2022

Exercice 1

Multiples **(4 points)**

1) 168 a 16 diviseurs : $D_{168} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 14, 21, 24, 28, 42, 56, 84, 168\}$

2) $5x^2 - 7xy = 17 \Leftrightarrow x(5x - 7y) = 17$ or 17 n'a que deux diviseurs 1 et 17 d'où :

$$\begin{cases} x = 1 \\ 5x - 7y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 7y = -12 \text{ impossible} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 17 \\ 5x - 7y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17 \\ 7y = 84 \end{cases} \Leftrightarrow y = 12$$

Il y un couple solution : $(17\,,\,12)$.

3) $(n+2)$ divise $(4n+1)$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$4n + 1 = k(n+2) \Leftrightarrow 4(n+2) - 7 = k(n+2) \Leftrightarrow (n+2)(4-k) = 7$$

$(n+2)$ divise 7 d'où le tableau solution :

$n+2$	-7	-1	1	7
n	-9	-3	-1	5

Exercice 2

Division euclidienne **(4 points)**

1) a) $$\begin{aligned} 842\,270 &= 3\,251 \times 259 + 261 \\ &= 3\,251 \times 259 + 259 + 2 \\ &= 3\,252 \times 259 + 2 \end{aligned}$$

Le quotient est 3 252 et le reste 2 dans la division de 842 270 par 259

b) $$\begin{aligned} -842\,270 &= 3\,251 \times (-259) - 261 \\ &= 3\,251 \times (-259) - 3\,251 + 2\,990 \\ &= 3\,251 \times (-260) + 2\,990 \end{aligned}$$

Le quotient est -260 et le reste 2 990 dans la division de $-842\,270$ par 3 251

2) « Il y va 25 mais pas 26 » d'où les inégalités :

$$\begin{cases} 26b > 1512 \\ b > \dfrac{1\,512}{26} \approx 58,15 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 25b \leqslant 1512 \\ b \leqslant \dfrac{1\,512}{25} = 60,48 \end{cases}$$

On a donc deux solutions possibles :

$$\begin{cases} b = 59 \\ r = 1\,512 - 59 \times 25 = 37 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b = 60 \\ r = 1\,512 - 60 \times 25 = 12 \end{cases}$$

Exercice 3

Congruence **(6 points)**

1) a) $4^3 = 64 = 7 \times 9 + 1 \Rightarrow 4^3 \equiv 1\ (7)$.

$$11 \equiv 4\ (7) \overset{\uparrow 2011}{\Rightarrow} 11^{2011} \equiv 4^{2011}\ (7) \Rightarrow 11^{2011} \equiv (4^3)^{670} \times 4\ (7) \overset{4^3 \equiv 1}{\Leftrightarrow} 11^{2011} \equiv 4\ (7)$$

b) $2023 = 17 \times 118 + 16 \;\Rightarrow\; 2022 \equiv 16 \equiv -1\ (17) \overset{\uparrow 2022}{\Rightarrow} 2022^{2022} \equiv (-1)^{2022} \equiv 1\ (17)$.
$2022^{2022} - 1 \equiv 0\ (17)$ donc $2022^{2022} - 1$ est divisible par 17.

2) a) Multiples de 17 inférieurs à 100 : 0, 17, 34, 51, 68, 85.

b) Par double implication :
$n \equiv 0\ (17) \;\Rightarrow\; 10a + b \equiv 0\ (17) \overset{\times(-5)}{\Rightarrow} -50a - 5b \equiv 0\ (17) \overset{-50\equiv 1\ (17)}{\Rightarrow} a - 5b \equiv 0\ (17)$.
Réciproquement :
$a - 5b \equiv 0\ (17) \overset{\times 10}{\Rightarrow} 10a - 50b \equiv 0\ (17) \overset{-50\equiv 1\ (17)}{\Rightarrow} 10a + b \equiv 0\ (17) \;\Rightarrow n \equiv 0\ (17)$.

c) « Un entier est divisible par 17 si, et seulement si, la somme de ses dizaine diminuée de 5 fois du chiffre de ses unités est divisible par 17. »

d) En testant ce critère, on obtient :

- $562 \longrightarrow 56 - 10 = 46$ non divisible par 17.
- $833 \longrightarrow 83 - 15 = 68$ divisible par 17.
- $1\,547 \longrightarrow 154 - 35 = 119 \longrightarrow 11 - 45 = -34$ divisible par 17.
- $3\,601 \longrightarrow 360 - 5 = 355 \;\Rightarrow\; 35 - 25 = 10$ non divisible par 17.

Exercice 4

Résolution d'équation **(3 points)**

1) On obtient le tableau de congruence suivant :

$x \equiv\ (6)$	0	1	2	3	4	5
$x^2 \equiv\ (6)$	0	1	4	3	4	1
$-x+4 \equiv\ (6)$	4	3	2	1	0	5
$x^2 - x + 4 \equiv\ (6)$	4	4	0	4	4	0

2) D'après le tableau $x^2 - x + 4 \equiv 0\ (6)$ admet deux solutions $x \equiv 2\ (6)$ et $x \equiv 5\ (6)$

Exercice 5

Date anniversaire **(3 points)**

1) Comme $12 \equiv 0\ (12)$ et $37 \equiv 1\ (12)$, l'équation donne bien $m \equiv z\ (12)$.

2) $406 = 12 \times 33 + 10 \;\Rightarrow\; 406 \equiv 10\ (12)$ donc $m = 10$.
On en déduit alors $12j = z - 37m = 406 - 370 = 36 \;\Rightarrow\; j = 3$.
La date d'anniversaire du spectateur est donc le « 3 octobre »