Correction du contrôle

Du jeudi 07 avril 2022

EXERCICE 1

Algorithme d'Euclide et pgcd **(6 points)**

1) $6\,157 = 1\,645 \times 3 + 1\,222$
$1\,645 = 1\,222 \times 1 + 423$
$1\,222 = 423 \times 2 + 376$ $\Rightarrow$ $\text{pgcd}(6\,157\,,\,1\,645) = 47$
$423 = 376 \times 1 + 47$
$376 = 47 \times 8$

2) a) $4(5n+4) - 5(4n+3) = 20n + 16 - 20n - 15 = 1$

Il existe donc $(u, v) = (4\,, -5)$ tel que $u(5n+4) + v(4n+3) = 1$, d'après le théorème de Bézout, $(5n+4)$ et $(4n+3)$ sont premiers entre eux.

b) $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}[n(5n+4)\,,\, n(4n+3)] = n\,\text{pgcd}(5n+4\,,\,4n+3) \overset{a)}{=} n$.

3) a) On pose $d = \text{pgcd}(a, b)$.

d divise a et b, donc d divise toute combinaison linéaire de a et de b donc d divise :

$-a + 3b = -(3n+11) + 3(n+6) = -3n - 11 + 3n + 18 = 7 \Rightarrow d$ diviseur de 7

On en déduit comme 7 est premier que $d \in \{1\,,\,7\}$.

b) On doit avoir :

$$\begin{cases} 3n + 11 \equiv 0\ (7) \\ n + 6 \equiv 0\ (7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3n \equiv -11\ (7) \\ n \equiv -6\ (7) \end{cases} \overset{-6\equiv 1\ (7)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3n \equiv -11\ (7) \\ n \equiv 1\ (7) \end{cases} \overset{-11\equiv 3\ (7)}{\Leftrightarrow} n \equiv 1\ (7)$$

Donc $\text{pgcd}(a, b) = 7$ si $n \equiv 1\ (7)$.

EXERCICE 2

Équation diophantienne **(7 points)**

1) a) $\begin{cases} 47 = 43 \times 1 + 4 & (1) \\ 43 = 4 \times 10 + 3 \\ 4 = 3 \times 1 + 1 \end{cases}$ donc $\text{pgcd}(47, 43) = 1$.

b) $43 = 4 \times 11 - 1 \Leftrightarrow 4 \times 11 = 43 + 1$

$(1) \times 11$: $47 \times 11 = 43 \times 11 + 4 \times 11 \Leftrightarrow 47 = 43 \times 11 + 43 + 1 \Leftrightarrow$

$47 \times 11 = 43 \times 12 + 1 \Leftrightarrow 47(11) - 43(12) = 1$

Une solution de l'équation $47u - 43v = 1$ est $(11\,,\,12)$.

2) a) **Corollaire du théorème de Bézout** : « l'équation $ax + by = c$ admet des solutions entières si, et seulement si, c est un multiple de $\text{pgcd}(a, b)$. »

Comme 47 et 43 sont premiers entre eux, 7 est un multiple de $\text{pgcd}(47, 43)$ et donc l'équation (E) admet des solutions.

b) $47(11) - 43(12) = 1 \overset{\times 7}{\Leftrightarrow} 47(77) - 43(84) = 7$

Donc $(77\,,84)$ est solution de (E).

c) Soit (x, y) un solution de (E).

Par soustraction de la solution générale à la solution particulière, on obtient :

$$47(x - 77) = 43(y - 84) \quad \text{(E')}$$

43 divise $47(x - 77)$ or 47 et 43 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 43 divise $(x - 77)$. On a alors $x - 77 = 43k,\ k \in \mathbb{Z}$

En remplaçant de (E'), on obtient $y - 84 = 47k$.

Les couples solutions sont de la forme : $\begin{cases} x = 77 + 43k \\ y = 84 + 47k \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z}.$

On vérifie que ces couples sont bien solutions en remplaçant de (E).

d) Pour obtenir le couple, d'entiers naturels les plus petits, on prend $k = -1$: $(34\,,37)$.

3) $\begin{cases} n \equiv 12\ (43) \\ n \equiv 5\ \ (47) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 12 + 43u \\ n = 5 + 47v \end{cases}, \ u, v \in \mathbb{Z}$

(u, v) vérifie alors : $5 + 47v = 12 + 43u \Leftrightarrow 47v - 43u = 7$

(v, u) est solution de E dont le couple, d'entiers naturels les plus petits, est $(34, 37)$.

Le plus petit entier naturel cherché est donc : $n = 12 + 43(37) = 5 + 47(34) = 1\,603$.

EXERCICE 3

Codage **(7 points)**

1) La fonction de codage est $f(x) = 3x + 11$.

a) $\text{G} \to 6 \overset{x \mapsto 3x+11}{\to} 29 \equiv 3\ (26) \to \text{D}$

$\text{S} \to 18 \overset{x \mapsto 3x+11}{\to} 65 \equiv 13\ (26) \to \text{N}$

b) Par double implication : (les congruences sont modulo 26)

$y \equiv 3x + 11 \overset{\times 9}{\Rightarrow} 9y \equiv 27x + 99 \overset{27 \equiv 1}{\Rightarrow} 9y \equiv x + 99 \Rightarrow x \equiv 3y - 99 \overset{-99 \equiv 5}{\Rightarrow}$

$x \equiv 9y + 5$ réciproquement

$x \equiv 9y + 5 \overset{\times 3}{\Rightarrow} 3x \equiv 27y + 15 \overset{27 \equiv 1}{\Rightarrow} 3x \equiv y + 15 \Rightarrow y \equiv 3x - 15 \overset{-15 \equiv 11}{\Rightarrow}$

$y \equiv 3x + 11\ (26)$.

c) $\text{V} \to 21 \overset{y \mapsto 9y+5}{\to} 194 \equiv 12\ (26) \to \text{M}$

$\text{B} \to 1 \overset{y \mapsto 9y+5}{\to} 14 \equiv 14\ (26) \to \text{O}$

$\text{U} \to 20 \overset{y \mapsto 9y+5}{\to} 185 \equiv 3\ (26) \to \text{D}$

$\text{T} \to 19 \overset{y \mapsto 9y+5}{\to} 176 \equiv 20\ (26) \to \text{U}$

$\text{S} \to 18 \overset{y \mapsto 9y+5}{\to} 167 \equiv 11\ (26) \to \text{L}$

$\text{B} \to 1 \overset{y \mapsto 9y+5}{\to} 14 \equiv 14\ (26) \to \text{O}$

2) La fonction de codage est : $f(x) = ax + b$.

a) $\begin{cases} \text{E}(4) \to \text{I}(8) \\ \text{V}(21) \to \text{T}(19) \end{cases} \overset{f}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 4a + b \equiv 8\ (26) & (1) \\ 21a + b \equiv 19\ (26) & (2) \end{cases}$

$(2) - (1)$: $21a - 4a \equiv 11\ (26) \Leftrightarrow 17a \equiv 11\ (26)$.

b) Par double implication :

$17a \equiv 11\ (26) \overset{17\equiv -9}{\Rightarrow} -9a \equiv 11\ (26) \overset{\times -3}{\Rightarrow} 27a \equiv -33\ (26) \overset{27\equiv 1}{\Rightarrow} a \equiv -33 \equiv 19\ (26)$

Comme a est compris entre 0 et 25, on en déduit que : $a = 19$.

c) De (1) : $b \equiv 8 - 4a \equiv -68 \equiv 10\ (26)$.

Comme b est compris entre 0 et 25, on en déduit que : $b = 10$.

La fonction de codage est donc $f(x) = 19x + 10$.