Correction du contrôle

Du jeudi 07 décembre 2023

Exercice 1

QCM **(5 points)**

1) **Réponse b)** : $2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = 2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$

2) **Réponse a)** : $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

3) **Réponse c)** : Les solutions sont $z_1 = 1$, $z_2 \overset{\Delta=-64}{=} \dfrac{-6+8\mathrm{i}}{2} = -3+4\mathrm{i}$ et $z_3 = -3-4\mathrm{i}$.
Si on associe à A, B et C les affixes z_1, z_2 et z_3 on a alors :
$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{-4-4\mathrm{i}}{-4+4\mathrm{i}} \overset{\div(-4)}{=} \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{(1+\mathrm{i})^2}{2} = \frac{2\mathrm{i}}{2} = \mathrm{i}$$
$\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $\dfrac{AB}{AC} = |\mathrm{i}| = 1$ donc ABC rectangle isocèle en A.

4) **Réponse d)** : $|z+\mathrm{i}| = |z-1| \Leftrightarrow |z - z_D| = |z - z_A| \Leftrightarrow DM = AM$.
L'ensemble des points M(z) est la médiatrice de [AD].

5) **Réponse a)** : $\dfrac{z+\mathrm{i}}{z+1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{z+\mathrm{i}}{z+1} = \dfrac{\overline{z}-\mathrm{i}}{\overline{z}+1} \Leftrightarrow z\overline{z} + z + \mathrm{i}\overline{z} + \mathrm{i} = z\overline{z} - \mathrm{i}z + \overline{z} - \mathrm{i} \Leftrightarrow$
$(z-\overline{z}) + \mathrm{i}(z+\overline{z}) = -2\mathrm{i} \overset{z=x+\mathrm{i}y}{\Leftrightarrow} 2\mathrm{i}\,y + 2\mathrm{i}\,x = -2\mathrm{i} \overset{\div 2\mathrm{i}}{\Leftrightarrow} y + x = -1$ droite (CD).

Exercice 2

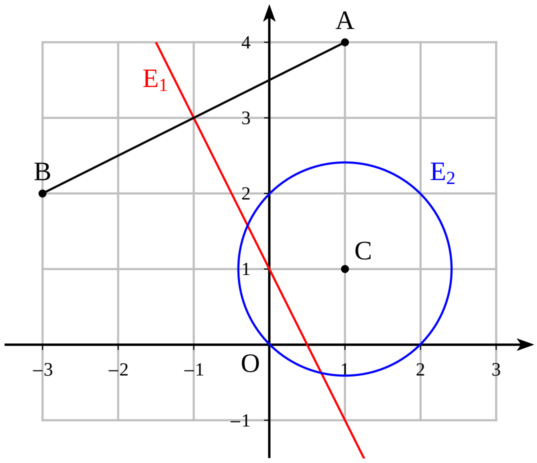
Ensemble de points **(3 points)**

1) $|z - 1 - 4\mathrm{i}| = |z + 3 - 2\mathrm{i}| \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$.
L'ensemble E_1 est la médiatrice du segment [AB].

2) $(1+\mathrm{i})z - 2\mathrm{i} = (1+\mathrm{i})\left(z - \dfrac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right) = (1+\mathrm{i})\left(z - \dfrac{2\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{2}\right) = (1+\mathrm{i})(z-1-\mathrm{i})$.
$|(1+\mathrm{i})\,z - 2\mathrm{i}| = 2 \Leftrightarrow |1+\mathrm{i}| \times |z - z_C| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2}\,CM = 2 \Leftrightarrow CM = \sqrt{2}$.
L'ensemble E_2 est le cercle de centre C et de rayon $\sqrt{2}$.

3) Représentation de E_1 et E_2.

On peut remarque que la médiatrice de [AB] passe par le point $(-1\,;\,3)$ et que le cercle de centre C passe par l'origine.



EXERCICE 3

Argument d'un nombre complexe **(5 points)**

1) a) $z_1 = -\sqrt{3} + \mathrm{i} = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

$\arg\left[\left(-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^8\right] = 8\arg(z_1) = \dfrac{20\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

b) $z_2 = \left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^6 = \left[2\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^6 = \left(2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^6 = 64\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi)} = 64 \in \mathbb{R}$

2) $z_n = \left(3-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^n = \left[2\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)\right]^n = \left[2\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right]^n = \left(2\sqrt{3}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$

$z_n \in \mathrm{i}\mathbb{R} \overset{k\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} -\dfrac{n\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \overset{\times\frac{6}{\pi}}{\Leftrightarrow} -n = 3+6k \Leftrightarrow n+3 = -6k \Leftrightarrow (n+3)$ multiple de 6.

3) $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg\left(\dfrac{-\dfrac{3}{2} - 6\mathrm{i}}{-\dfrac{1}{2} - 2\mathrm{i}}\right) \overset{\times(-2)}{=} \arg\left(\dfrac{3+12\mathrm{i}}{1+4\mathrm{i}}\right) = \arg(3) = 0\ [2\pi]$.

A, B et C alignés.

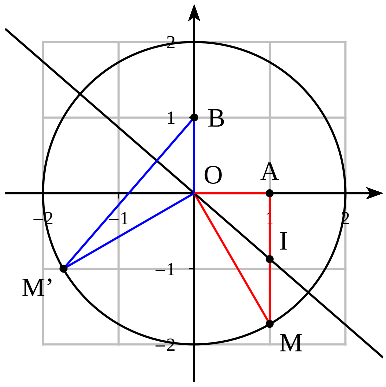
EXERCICE 4

Triangles **(8 points)**

1) a) $z = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right] = 2\left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

b) $z' = -\mathrm{i}\,(1-\mathrm{i}\sqrt{3}) = -\sqrt{3} - \mathrm{i} = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

c)



d) $\dfrac{z_B - z'}{z_I} = \dfrac{\sqrt{3}+2\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}} \overset{\times 2}{=} \dfrac{2\sqrt{3}+4\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}\sqrt{3}} = \dfrac{(2\sqrt{3}+4\mathrm{i})(2+\mathrm{i}\sqrt{3})}{7}$

$= \dfrac{4\sqrt{3}+6\mathrm{i}+8\mathrm{i}-4\sqrt{3}}{7} = \dfrac{14\mathrm{i}}{7} = 2\mathrm{i}$.

$\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{BM'}\right) = \arg(2\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

(OI) est la médiane issue de O du triangle OAM et la hauteur issue de O du triangle OBM.

2) a) $z_I = \dfrac{x+1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{y}{2}$.

b) $z' = -\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y) = y - \mathrm{i}\,x$.

c) $\dfrac{z_B - z'}{z_I} = \dfrac{-y+(x+1)\mathrm{i}}{\dfrac{x+1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{y}{2}} \overset{\times 2}{=} \dfrac{2(-y+(x+1)\mathrm{i}}{x+1+\mathrm{i}y} = \dfrac{2\left[-y+(x+1)\mathrm{i}\right]\left[(x+1)-\mathrm{i}y\right]}{(x+1)^2+y^2}$

$= \dfrac{2\left[\cancel{-y(x+1)} + \mathrm{i}y^2 + (x+1)^2\mathrm{i} + \cancel{y(x+1)}\right]}{(x+1)^2+y^2} = 2\mathrm{i}$

d) $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{BM'}\right) = \arg(2\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Quelque soit le point M, (OI) est la médiane issue de O du triangle OAM et la hauteur issue de O du triangle OBM.