Correction du contrôle

Du jeudi 01 février 2024

EXERCICE 1

QCM **(5 points)**

1) **Réponse c)** : $D_{315} = \{1, 3, 5, 7, 9, 15, 21, 35, 45, 63, 105, 315\}$.
2) **Réponse c)** : $857 = 26 \times 32 + 25$
3) **Réponse b)** : $5^2 \equiv -1\ (26) \overset{\uparrow 68}{\Rightarrow} 5^{136} \equiv (-1)^{68} \equiv 1\ (26) \overset{\times 5}{\Rightarrow} 5^{137} \equiv 5\ (26)$.
4) **Réponse d)** : $200 \equiv -4\ (17) \overset{\uparrow 2}{\Rightarrow} 200^2 \equiv -16 \equiv 1\ (17) \overset{\uparrow 269}{\Rightarrow} 200^{538} \equiv 1^{538} \equiv 1\ (17)$
$\overset{\times 200}{\Rightarrow} 200^{539} \equiv 200 \equiv -4 \equiv 13\ (17)$.
5) **Réponse b)** : $10 \equiv -1\ (11) \overset{\uparrow n}{\Rightarrow} 10^n \equiv (-1)^n$:
$$\underbrace{555...5}_{99 \text{ fois}} \equiv \sum_{k=0}^{98} 5 \times 10^k \equiv \sum_{k=0}^{98} 5 \times (-1)^k \equiv 49(5-5) + 5 \equiv 5\ (11)$$

EXERCICE 2

Multiples et division euclidienne **(4 points)**

1) $(n-4)$ divise $(3n-7)$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :
$$3n - 7 = k(n-4) \Leftrightarrow 3(n-4) + 5 = k(n-4) \Leftrightarrow (n-4)(k-3) = 5$$
$(n-4)$ est un diviseur de 5 d'où le tableau solution :

$n-4$	-5	-1	1	5
n	-1	3	5	9

2) Soit d un diviseur commun positif à a et b.
d divise a et b donc d divise toute combinaison linéaire de a et de b donc d divise :
$$7a - 5b = 7(5k+4) - 5(7k+5) = 35k + 28 - 35k - 25 = 3$$
d divise 3 donc $d = 1$ ou $d = 3$.
3) $22b \leqslant 937 < 23b \overset{\div b}{\Leftrightarrow} 22 \leqslant \dfrac{937}{b} < 23 \overset{\uparrow(-1)\searrow}{\Leftrightarrow} \dfrac{1}{23} < \dfrac{b}{937} \leqslant \dfrac{1}{22} \overset{\times 937}{\Leftrightarrow} \underbrace{\dfrac{937}{23}}_{\approx 40,7} < b \leqslant \underbrace{\dfrac{937}{22}}_{\approx 42,6}$
Les valeurs possibles pour b sont 41 et 42 qui donne les restes respectifs 35 et 13.

EXERCICE 3

Congruence **(4 points)**

1) a) $3^2 \equiv 9 \equiv 1\ (8) \overset{\uparrow n}{\Rightarrow} 3^{2n} \equiv 1^n \equiv 1\ (8) \overset{-1}{\Rightarrow} 3^{2n} - 1 \equiv 0\ (8)$.
$3^{2n} - 1$ est donc multiple de 8.

b) On a :
$$\left.\begin{array}{l} 451 = 7 \times 64 + 3 \Rightarrow 451 \equiv 3\ (7) \\ 6 \equiv -1\ (7) \overset{\uparrow 43}{\Rightarrow} 6^{43} \equiv (-1)^{43} \equiv -1\ (7) \\ 912 = 7 \times 130 + 2 \Rightarrow 912 \equiv 2\ (7) \end{array}\right\} \Rightarrow 451 \times 6^{43} - 912 \equiv -3 - 2 \equiv -5 \equiv 2\ (7)$$
Le reste dans la division par 7 de $451 \times 6^{43} - 912$ est 2.

2) a) On détermine la série des restes de 3^n dans la division par 11 :
$3^0 \equiv 1\ (11)$, $3^1 \equiv 3\ (11)$, $3^2 \equiv 9\ (11)$, $3^3 \equiv 5\ (11)$, $3^4 \equiv 4\ (11)$, $3^5 \equiv 1\ (11)$.

La série des restes est de 5 donc :

$n \equiv ...\ (5)$	0	1	2	3	4
$3^n \equiv ...\ (11)$	1	3	9	5	4

b) $2016 = 11 \times 183 + 3 \Rightarrow 2016 \equiv 3\ (11) \overset{\uparrow 2017}{\Rightarrow} 2016^{2017} \equiv \left(3^5\right)^{403} \times 3^2 \equiv 1^{403} \times 9\ (11)$
Donc $2016^{2017} \equiv 9\ (11)$. Le reste dans la division par 11 de 2016^{2017} est 9.

Exercice 4

Divisibilité par 17 **(4 points)**

1) Les multiples de 17 inférieurs à 100 sont : 0, 17, 34, 51, 68, 85.
2) Par double implication :
$n \equiv 0\ (17) \Rightarrow 10a + b \equiv 0\ (17) \overset{\times -5}{\Rightarrow} -50a - 5b \equiv 0\ (17) \overset{-50 \equiv 1\ (17)}{\Rightarrow} a - 5b \equiv 0\ (17)$
Réciproquement :
$a - 5b \equiv 0\ (17) \overset{\times 10}{\Rightarrow} 10a - 50b \equiv 0\ (17) \overset{-50 \equiv 1\ (17)}{\Rightarrow} 10a + b \equiv 0\ (17) \Rightarrow n \equiv 0\ (17)$
3) Un nombre est divisible par 17 si, et seulement si, son nombre de dizaines augmenté de 5 fois de son chiffre des unité est divisible par 17.
4) 952 : $95 - 10 = 85$ divisible par 17.
10 754 : $1\,075 - 20 = 1\,055$, on réitère $105 - 25 = 80$ non divisible par 17.

Exercice 5

Vrai-Faux **(3 points)**

1) **Proposition 1 - Fausse** : contre exemple $2 \times 3 \equiv 6 \equiv 0\ (6)$.
On dit que 2 et 3 sont des diviseurs de 0.
2) **Proposition 2 - Vraie** : $1\,789 = 7 \times 255 + 4$ et $4^3 \equiv 64 \equiv 1\ (7)$
$1\,789 \equiv 4\ (7) \overset{\uparrow 1789}{\Rightarrow} 1\,789^{1789} \equiv \left(4^3\right)^{596} \times 4^1 \equiv 1^{596} \times 4 \equiv 4\ (11)$
3) **Proposition 3 - Fausse** : Contre exemple $3^2 + 3 \equiv 12 \equiv 2\ (5)$.