

Contrôle de mathématiques

Jeudi 21 mars 2024

EXERCICE 1

Équations diophantiennes

(9 points)

- 1) Citer le théorème de Gauss.
- 2) Justifier que l'équation $(E_1) : 15x - 9y = 14$ n'admet pas de solution.
On citera le théorème utilisé.
- 3) Soit l'équation $(E_2) : 10x + 27y = 1$.
On cherche l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ solution de (E) .
 - a) Déterminer une solution particulière de (E_2) à l'aide de l'algorithme d'Euclide.
 - b) En déduire l'ensemble des solutions de (E_2) .
- 4) Soit l'équation $(E_3) : 221x - 331y = 1$.
 - a) Donner une solution évidente de (E_3) .
 - b) Sans justification, donner l'ensemble des solutions de (E_3) .

EXERCICE 2

Théorème des restes chinois

(11 points)

Soit le système $(S) : \begin{cases} n \equiv 13 \pmod{19} \\ n \equiv 6 \pmod{12} \end{cases}$

- 1) On cherche l'ensemble des solutions du système (S) .
Soit (u, v) un couple solution de l'équation : $19u + 12v = 1$
 - a) Justifier l'existence d'un tel couple (u, v) . On citera le théorème utilisé.
 - b) Soit $n_0 = 6 \times 19u + 13 \times 12v$.
Montrer que n_0 est solution du système (S) .
 - c) Donner un exemple d'entier n_0 solution de (S) .
- 2) Soit n une solution de (S) , montrer que $n - n_0 \equiv 0 \pmod{228}$. On citera le théorème utilisé.
- 3) Montrer alors que $n = -6 + 228k$, $k \in \mathbb{Z}$.
- 4) **Application :**
La comète A passe tous les 19 ans et apparaîtra la prochaine fois dans 13 ans.
La comète B passe tous les 12 ans et apparaîtra la prochaine fois dans 6 ans.
Dans combien d'années pourra-t-on observer les deux comètes la même année ?
On pourra faire un schéma pour se justifier.

