Correction du contrôle

Du jeudi 21 mars 2024

EXERCICE 1

Équations diophantiennes **(9 points)**

1) « Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$. Si a divise bc et si a est premier avec b alors a divise c. »

2) Corollaire du théorème de Bézout : « L'équation $ax + by = c$ avec $a, b, c \in \mathbb{Z}$ admet des solutions entières si, et seulement si, c est un multiple de $\text{pgcd}(a, b)$. »
$\text{pgcd}(15, 9) = 3$ et 14 non multiple de 3 donc (E_1) n'admet pas de solution.

3) a) $\text{pgcd}(10, 27) = 1$ car :

$$\begin{array}{ll} 27 = 10 \times 2 + 7 & (1) \\ 10 = 7 \times 1 + 3 & (2) \\ 7 = 3 \times 2 + 1 & (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} (3) & 3 \times 2 = 7 - 1 \\ 2 \times (2) & 10 \times 2 = 7 \times 2 + 7 - 1 = 7 \times 3 - 1 \\ & 7 \times 3 = 10 \times 2 + 1 \\ 3 \times (1) & 27 \times 3 = 10 \times 6 + 10 \times 2 + 1 = 10 \times 8 + 1 \end{array}$$

Donc $10 \times (-8) + 27 \times 3 = 1$ d'où $(-8\,;\,3)$ solution de (E_2).

b) Soit $(x\,;\,y)$ une solution générale de (E_2). Par soustraction terme à terme de la solution générale et de la solution particulière on obtient :

$$10(x + 8) + 27(y - 3) = 0 \;\Leftrightarrow\; 10(x + 8) = 27(-y + 3) \quad (E'_2)$$

27 divise $10(x + 8)$, or 10 et 27 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 27 divise $(x + 8)$. On a donc $x + 8 = 27k$, $k \in \mathbb{Z}$.
En remplaçant dans (E'_2), on a : $-y + 3 = 10k$.

Les couples $(x\,;\,y)$ sont de la forme : $\begin{cases} x = -8 + 27k \\ y = 3 - 10k \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$

On vérifie que ces couples sont bien solutions de (E'_2).

4) a) $(3\,;\,2)$ est solution de (E_3) car : $221 \times 3 - 331 \times 2 = 663 - 662 = 1$

b) Les solutions sont alors de la forme : $\begin{cases} x = 3 + 331k \\ y = 2 + 221k \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$

EXERCICE 2

Restes chinois **(11 points)**

1) a) Théorème de Bézout : « a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que $au + bv = 1$. »
$\text{pgcd}(19, 12) = 1$, d'après le théorème de Bézout, il existe (u, v) tel que $19u + 12v = 1$

b) $19u + 12v = 1 \;\Leftrightarrow\; 12v = 1 - 19u$, on a alors :

$n_0 = 6 \times 19u + 13 \times (1 - 19u) \;\Leftrightarrow\; n_0 = 19(-7u) + 13 \;\Rightarrow\; n_0 \equiv 13\ (19)$.

De même $19u + 12v = 1 \;\Leftrightarrow\; 19u = 1 - 12v$, on a alors :

$n_0 = 6 \times (1 - 12v) + 13 \times 12v \;\Leftrightarrow\; n_0 = 12(7v) + 6 \;\Rightarrow\; n_0 \equiv 6\ (12)$.

Donc n_0 est solution de (S).

c) $19(-5) + 12(8) = -95 + 96 = 1$ donc $(-5\,;\,8)$ est solution de $19u + 12v = 1$
On obtient alors : $n_0 = 6 \times 19(-5) + 13 \times 12(8) = 678$

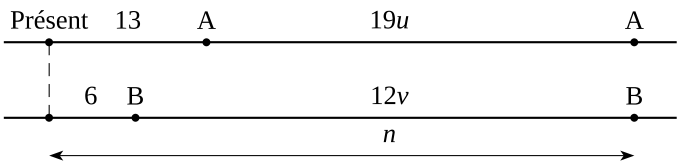
2) Corollaire du théorème de Gauss : « Si b et c divise a et si b et c sont premiers entre eux alors bc divise a »
Soit n une solution de (S), par soustraction terme à terme avec n_0, on obtient :

$$\begin{cases} n - n_0 \equiv 0\ (19) \\ n - n_0 \equiv 0\ (12) \end{cases}$$

19 et 12 divise $(n - n_0)$, or 19 et 12 sont premiers entre eux donc d'après le corollaire du théorème de Gauss, $19 \times 12 = 228$ divise $(n - n_0)$. On a alors $n - n_0 = 0\ (228)$.

3) D'après la question 1 c), on a $n_0 = 678 = 228 \times 3 - 6 \equiv -6\ (228)$.
D'après la question précédente $n \equiv n_0 \equiv -6\ (228)$, donc $n = -6 + 228k$, $k \in \mathbb{Z}$.

4) Soit u et v le nombre de périodes entière que les comètes ont effectué avant d'être visible la même année. On peut faire le schéma suivant :



n vérifie donc le système (S) : $\begin{cases} n \equiv 13\ (19) \\ n \equiv 6\ (12) \end{cases}$

En prenant $k = 1$, on obtient : $n = -6 + 228 = 222$ ans.

Il faudra 222 ans pour observer les deux comètes la même année.