Pour démarrer la classe de terminale S

Tout ce qu'il faut savoir de la 1re S

Paul Milan

28 novembre 2015

Table des matières

Chapitre 1

Second degré

1 Forme canonique

Soit un polynôme du second degré : $p(x) = ax^2 + bx + c \quad$ avec $\quad a \neq 0$

Sa **forme canonique** est : $p(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ appelé le **discriminant**

Exemple : Déterminer la forme canonique de $p(x) = 2x^2 + 3x - 14$

$$p(x) = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x - 7\right) = \left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} - 7\right] = \left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{121}{16}\right]$$

2 Racines du trinôme

Les solutions de l'équation $p(x) = 0$ dépendent du signe du discriminant Δ

- Si $\Delta > 0$, on a deux racines distinctes : $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$, on a une racine double : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, pas de racine réelle.

Exemple : Résoudre : $2x^2 + 3x - 14 = 0$ on calcule $\Delta = 9 + 112 = 121 = 11^2$
on obtient :

$$x_1 = \frac{-3 + 11}{4} = 2 \qquad \text{ou} \qquad x_2 = \frac{-3 - 11}{4} = -\frac{7}{2}$$

3 Factorisation, somme et produit des racines

La factorisation de $p(x)$ dépend du signe du discriminant Δ

- Si $\Delta > 0$, $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

  La somme S et le produit P des racines valent alors : $S = -\dfrac{b}{a}$ et $P = \dfrac{c}{a}$

  Si on connaît un racine évidente x_1, alors $x_2 = \dfrac{P}{x_1}$

- Si $\Delta = 0$, $p(x) = a(x - x_0)^2$
- Si $\Delta < 0$, le trinôme ne se factorise pas.

Exemple : Factoriser $p(x) = 2x^2 + 3x - 14$.

$x_1 = 2$ est racine évidente car $2 \times 2^2 + 3 \times 2 - 14 = 0$, $P = -\dfrac{14}{2} = -7$ donc $x_2 = \dfrac{P}{x_1} = -\dfrac{7}{2}$

On a alors : $p(x) = 2(x-2)\left(x + \dfrac{7}{2}\right) = (x-2)(2x+7)$

4 Signe du trinôme

- Si $\Delta > 0$, le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ à l'intérieur.

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$p(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

- Si $\Delta = 0$, le trinôme est nul en x_0 et du signe de a ailleurs.
- Si $\Delta < 0$, le trinôme est du signe de a sur $\mathbb{R}$.

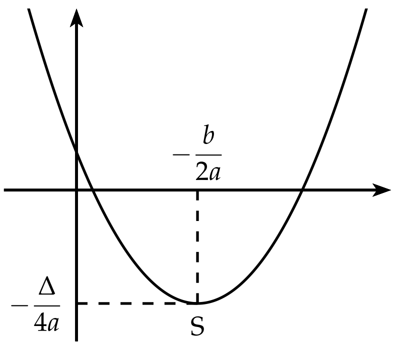
Exemple : Résoudre $2x^2 + 3x - 14 \leqslant 0$. On a calculé $x_1 = 2$ et $x_2 = -\dfrac{7}{2}$

$a = 2 > 0$, on prend donc à l'intérieur des racines : $S = \left[-\dfrac{7}{2} ; 2\right]$

5 Variation et représentation

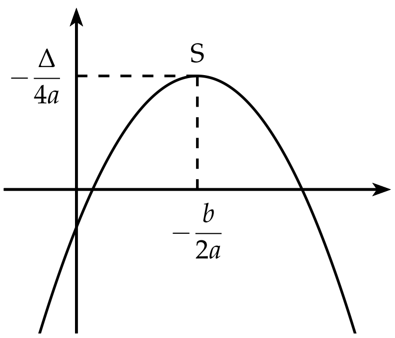
Si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut, on a donc les variations suivantes :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$p(x)$	$+\infty$ ↘	$-\frac{\Delta}{4a}$	↗ $+\infty$



Si $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas, on a donc les variations suivantes

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$p(x)$	$-\infty$ ↗	$-\frac{\Delta}{4a}$	↘ $-\infty$



Chapitre 2

Généralité sur les fonctions

1 Parité d'une fonction

Soit une fonction f définie sur un ensemble D_f symétrique par rapport à l'origine.
Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. On dit que la fonction f est :

- est **paire** $\Leftrightarrow \quad \forall x \in D_f, \quad f(-x) = f(x)$
  $\mathscr{C}_f$ est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées
- est **impaire** $\Leftrightarrow \quad \forall x \in D_f, \quad f(-x) = -f(x)$
  $\mathscr{C}_f$ est alors symétrique par rapport à l'origine

Remarque : La fonction carrée, $f(x) = x^2$ est paire et la fonction inverse, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ est impaire

2 Variation d'une fonction

Soit I un intervalle (ouvert ou fermé, borné ou non). a et b deux réel de I

Soit f une fonction définie au moins sur I. On dit que :

- f est **croissante** sur I si, et seulement si : $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$
- f est **décroissante** sur I si, et seulement si : $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$
- f est **monotone** sur I si, et seulement si f est croissante ou décroissante sur I.

Remarque : On dit qu'une fonction croissante conserve la relation d'ordre et qu'une fonction décroissante inverse la relation d'ordre.

3 Résolution graphique

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f.
Pour résoudre **graphiquement**

- $f(x) = 0$ on cherche les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
- $f(x) = m$ on cherche les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec la droite horizontale $y = m$.
- $f(x) > 0$ ou $f(x) < 0$ on cherche les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui sont situés au dessus ou en dessous de l'axe des abscisses.

4 Fonctions de référence

Une **fonction affine** f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax + b$

Le signe du coefficient directeur a donne les variations de la fonction :

si $a > 0$ f est croissante si $a < 0$ f est décroissante

La représentation d'une fonction affine est une **droite** qui passe par le point $(0; b)$

La **fonction carrée** f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$
La fonction carrée est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur R_+.

La représentation de la fonction carrée est une **parabole** d'axe Oy dont le sommet est l'origine.

La **fonction inverse** f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$
La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$

La représentation de la fonction inverse est une **hyperbole** équilatère dont le point de symétrie est l'origine et les **asymptotes** les axes de coordonnées.

La fonction **racine carrée** f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \sqrt{x}$
La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$

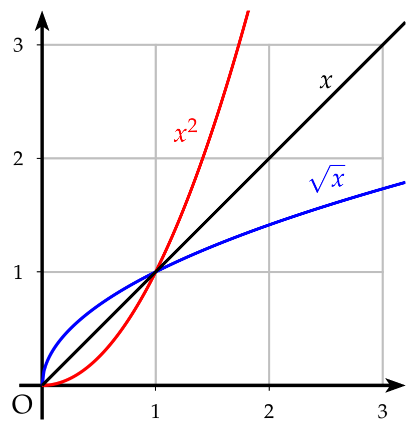
La représentation de la fonction racine carrée est la demi-parabole d'ordonnées positives d'axe Ox.

Pour tout réel x positif ou nul, on a les relations suivante :

si $x \in [0; 1]$, $x^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{x}$ et si $x \in [1; +\infty[$, $\sqrt{x} \leqslant x \leqslant x^2$

Remarque : On observe que le rapport de ces fonctions s'inverse autour de 1 comme le montrent les représentations suivantes :
On constate que :

- si $x < 1$ la fonction carrée est **en dessous** de la fonction identité qui est **en dessous** de la fonction racine carrée.
- si $x > 1$ la fonction carrée est **au dessus** de la fonction identité qui est **au dessus** de la fonction racine carrée.



5 Sens de variation des fonctions associées

Soit un réel k et deux fonctions u et v définies sur un intervalle I

Somme
- u et v croissantes $\Rightarrow$ $u+v$ croissante
- u et v décroissantes $\Rightarrow$ $u+v$ décroissante

Produit par un réel
- Si $k>0$ $\Rightarrow$ u et $k\,u$ ont mêmes variations
- Si $k<0$ $\Rightarrow$ u et $k\,u$ ont des variations contraires

Racine carrée et inverse
- u positive sur I $\Rightarrow$ u et $\sqrt{u}$ ont mêmes variations
- u non nulle sur I $\Rightarrow$ u et $\dfrac{1}{u}$ ont des variations contraires.

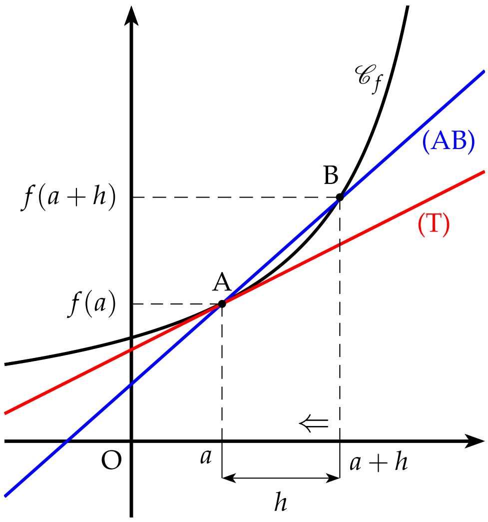
Exemple : Déterminer les variations des fonctions $f(x)=\sqrt{1-x}$ et $g(x)=\dfrac{1}{2-x}$

- Pour f, on pose la fonction $u(x)=1-x$ définie sur $\mathrm{I}=]-\infty;1]$. La fonction u est affine de coefficient directeur -1 donc décroissante sur I. La fonction f est donc décroissante sur I
- Pour g, on pose la fonction $v(x)=2-x$ définie sur $\mathrm{J}=\mathbb{R}-\{2\}$. La fonction v est affine de coefficient directeur -1 donc décroissante sur J. La fonction g est alors croissante sur $]-\infty;2[$ ou sur $]2;+\infty[$

Chapitre 3

La fonction dérivée

1 Définition



Le coefficient directeur α de la droite (AB) est :

$$\alpha = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si le point B se rapproche du point A (h tend vers 0), la droite (AB) se rapproche de la tangente (T) à la courbe en $x = a$. Le coefficient directeur de cette tangente est appelé nombre dérivé noté $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I et a un point de I.

- On appelle **taux d'accroissement** (ou taux de variation) de la fonction f entre a et $a+h$, le nombre t défini par :

$$t = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- La fonction f admet un **nombre dérivé**, noté $f'(a)$, en a, si et seulement si, le taux d'accroissement de la fonction f en a **admet une limite**, c'est à dire :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{ou encore} \quad f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Remarque : Le nombre dérivée au point a correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe au point a.

Soit une fonction f définie sur un intervalle I.
Si la fonction f admet un nombre dérivé en tout point de I, on dit que la fonction f est dérivable sur I. La fonction, notée f', définie sur I qui à tout x associe son nombre dérivé est appelée **fonction dérivée** de f.

2 Dérivées des fonctions élémentaires. Règles de dérivation

Fonction	D_f	Dérivée	D'_f
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$

Règle de dérivation.

Dérivée de la somme	$(u+v)' = u' + v'$
Dérivée du produit par un scalaire	$(\lambda u)' = \lambda u'$
Dérivée du produit	$(uv)' = u'v + uv'$
Dérivée de l'inverse	$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
Dérivée du quotient	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
Dérivée de la puissance	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
Dérivée de la racine	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Remarque : Les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles sont dérivables sur leur ensemble de définition.

Exemple : Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = \frac{2x+5}{x^2+1}$

En appliquant la dérivée du quotient :

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x+5)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2-10x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+10x+2}{(x^2+1)^2}$$

3 Équation de la tangente

L'équation de la tangente (T_a) en a à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f dérivable en a est égale à :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exemple : f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$
Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 2.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 2 est : $y = f'(2)(x-2) + f(2)$
On détermine l'expression de la dérivée : $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$
On calcule ensuite : $f'(2) = 3$ et $f(2) = 6$
On obtient donc l'équation de la tangente suivante : $y = 3(x-2) + 6 \Leftrightarrow y = 3x$

4 Sens de variation

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.

- Si la fonction dérivée f' est **nulle**, alors la fonction est **constante**.
- Si la fonction dérivée est **strictement positive** (sauf en quelques point isolé de I où elle s'annule), alors la fonction f est **strictement croissante** sur I.
- Si la fonction dérivée est **strictement négative** (sauf en quelques point isolé de I où elle s'annule), alors la fonction f est **strictement décroissante** sur I.

Exemple : Soit fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$.
Dresser son tableau de variation.

On calcule la dérivée : $f'(x) = -3x^2 + 6x = 3x(-x+2)$

Les valeurs qui annulent la dérivée : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

Le signe de $f'(x)$ est celui d'un trinôme du second degré.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.

- Si $c \in$ I est un extremum local de f sur I alors $f(c) = 0$
- Si $c \in$ I, $f'(c) = 0$ et si f' change signe en c alors c est un extremum local de f sur I.

Chapitre 4

Suite

1 Définition

Une **suite numérique** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une succession de nombres réels ordonnés. À un rang donné n, on associe un nombre réel u_n.

$$\begin{aligned} (u_n) \quad : \quad \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u_n \end{aligned}$$

u_n est appelé le **terme général** de la suite (u_n).

On peut définir une suite (u_n) :

- De façon **explicite** : $u_n = f(n)$: $\quad u_n = 3n + 5$
- De façon **récurrente** :
  1) à un terme : u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$: $\quad u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$
  2) à deux termes : u_0, u_1 et $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$: $\quad u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$
- Par une **somme de termes** : $u_n = \sum_{k=0}^{n} T_n$: $\quad u_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ (somme des carrés)

2 Variation

On dit qu'une suite (u_n) est strictement **croissante** si : $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} > u_n$

On dit qu'une suite (u_n) est strictement **décroissante** si : $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} < u_n$

Si une suite (u_n) est soit croissante, soit décroissante, la suite est dite **monotone**.

Remarque : Pour connaître les variations d'une suite (u_n), on étudie :

- Le signe de : $u_{n+1} - u_n$
- Si tous les termes sont strictement positifs, on peut comparer de rapport : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
- Si la suite est définie de façon explicite, on peut aussi étudier le signe de la dérivée de la fonction associée.

3 Suite arithmétique

Une suite arithmétique (u_n) est définie par :

- un premier terme u_0 ou u_p
- une relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$, r étant la raison de la suite

Une suite est arithmétique lorsque la **différence** entre deux termes consécutifs est **constante**. On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = r$

Le terme général u_n d'une suite arithmétique s'exprime en fonction de n de la façon suivante :

- Si le premier terme est u_0, alors : $u_n = u_0 + n\,r$ (**croissance linéaire**)
- Si le premier terme est u_p, alors : $u_n = u_p + (n-p)\,r$

Somme des termes

Somme des n entiers naturels : $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1) \times \dfrac{u_0 + u_n}{2} = \text{Nbre de termes} \times \dfrac{\Sigma \text{ termes extrèmes}}{2}$

Exemples : $1 + 2 + \cdots + 100 = \dfrac{100 \times 101}{2} = 5050$, $1 + 3 + 5 + \cdots + 99 = 50 \times \dfrac{1+99}{2} = 2500$

4 Suite géométrique

Une suite géométrique (u_n) est définie par :

- un premier terme u_0 ou u_p
- une relation de récurrence : $u_{n+1} = q \times u_n$ q étant la raison de la suite

Une suite est géométrique lorsque le **rapport** entre deux termes consécutifs est **constant**. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

Le terme général u_n d'une suite géométrique s'exprime en fonction de n de la façon suivante :

- Si le premier terme est u_0, alors : $u_n = q^n\,u_0$ (**croissance exponentielle**)
- Si le premier terme est u_p, alors : $u_n = q^{n-p}\,u_p$

Somme des termes

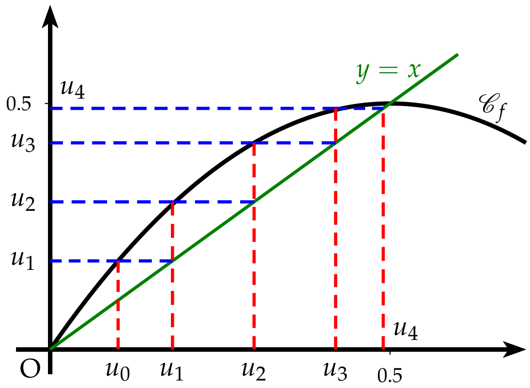
$$1+q+q^2+\dots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$S_n = u_0+u_1+\dots+u_n = u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1^{\text{er}}\text{ terme}\times\frac{1-q^{\text{Nbre termes}}}{1-q}$$

Exemple : $3+6+12+\dots+3\times 2^{10} = 3\times\frac{1-2^{11}}{1-2} = 3(2^{11}-1) = 6141$

5 Visualisation d'une suite

Pour visualiser une suite définie par récurrence, on trace la fonction f et la droite $y = x$ qui permet de reporter les termes sur l'axe des abscisses.



6 Convergence d'une suite

On dit que la suite (u_n) a pour limite ℓ si, et seulement si, tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et l'on dit que la suite **converge** vers ℓ

On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) si, et seulement si, tout intervalle $]A;+\infty[$ (resp. $]-\infty;B[$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

On dit que la suite **diverge** vers $+\infty$ (resp. $-\infty$)

Convergence d'une suite géométrique. Soit q un réel. On a les limites suivantes

- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$
- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- Si $q \leqslant -1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$ n'existe pas.

Exemples : une suite géométrique de raison 2 est divergente tandis qu'une suite géométrique de raison 0,75 est convergente vers 0.

La suite $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} = 2\left[1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$ converge vers 2.

7 Programmation

Remarque : La fonction f et le terme initial $A = u_0$ étant donnés.

7.1 Calcul des termes d'une suite

Deux programmes pour déterminer un terme particulier ou la liste des premiers termes d'une suite définie par récurrence :

Variables : N, I entiers A, U réels
f fonction
Entrées et initialisation
Lire A, N
$A \to U$
Traitement
pour I variant de 1 à N **faire**
$f(U) \to U$
fin
Sorties : Afficher U

Variables : N, I entiers A, U réels
L_1 liste, f fonction
Entrées et initialisation
Lire A, N
$A \to U$
Liste L_1 remis à 0
$U \to L_1(1)$
Traitement
pour I variant de 1 à N **faire**
$f(U) \to U$
$U \to L_1(I+1)$
fin
Sorties : Afficher L_1

7.2 Convergence ou divergence d'une suite

Dans le cas où la suite (u_n) est croissante. Deux programme permettant,

- si la suite est convergente, de s'approcher de la limite en déterminant le rang n à partir duquel la différence entre le terme et la limite vaut 10^{-P},
- si la suite tend vers $+\infty$, de déterminer le rang n de la suite à partir duquel les termes sont supérieurs à un nombre M donné

Variables : N, P entiers A, U réels
f fonction
Entrées et initialisation
$A \to U$
$0 \to N$
Traitement
tant que $\ell - U \geqslant 10^{-P}$ **faire**
$f(U) \to U$
$N+1 \to N$
fin
Sorties : Afficher N

Variables : N entier A, U, M réels
f fonction
Entrées et initialisation
$A \to U$
$0 \to N$
Traitement
tant que $U \leqslant M$ **faire**
$f(U) \to U$
$N+1 \to N$
fin
Sorties : Afficher N

Chapitre 5

Trigonométrie

1 Lignes trigonométriques des angles remarquables

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

2 Formules élémentaires

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \left\{k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

3 Formules de symétrie et de déphasage

$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$
$$\sin(\pi - x) = \sin x$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

4 Formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

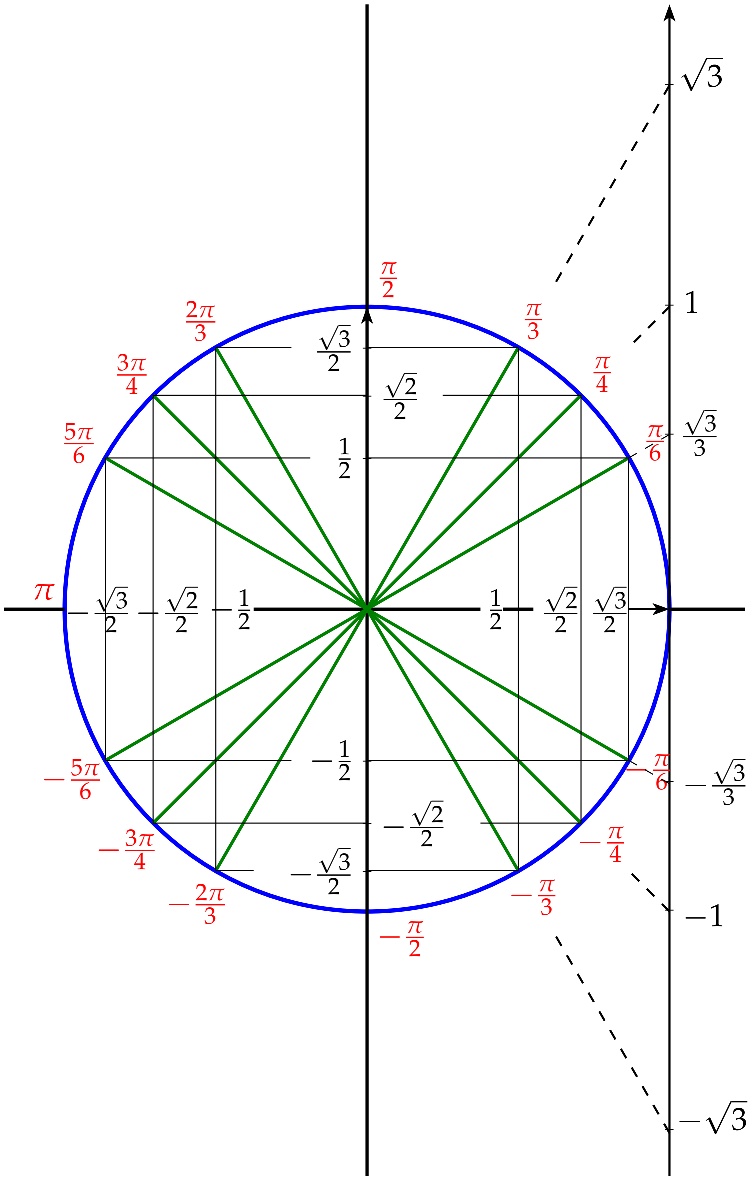
5 Formules de duplication et de linéarisation

$$\begin{aligned} \cos 2a &= cos^2 a - \sin^2 a \\ &= 2\cos^2 a - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 a \\ \sin 2a &= 2 \sin a \cos a \end{aligned}$$

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

6 Cercle trigonométrique



7 Équations trigonométriques

$$\sin a = \sin b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = a + 2k\pi \ \textbf{ou} \\ b = \pi - a + 2k\pi \end{cases}$$

$$\cos a = \cos b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = a + 2k\pi \ \ \textbf{ou} \\ b = -a + 2k\pi \end{cases}$$

Chapitre 6

Vecteurs dans le plan

1 Définitions

Un vecteur $\vec{u}$ est défini par une direction, un sens et une longueur (la norme de $\vec{u}$) notée $||\vec{u}||$.

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \Leftrightarrow \quad$ ABDC est un parallélogramme
- On définit l'addition de deux vecteurs a l'aide de la **relation de Chasles** : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- On définit le produit d'un vecteur par un réel par un vecteur de même direction $\lambda\vec{u}$

Colinéarité

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{R}, \ \vec{v} = k\vec{u}$
- A, B, C alignés $\quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{R}, \ \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$
- (AB) // (CD) $\quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{R}, \ \overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$

2 Dans un repère

Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on détermine un point ou un vecteur par deux coordonnées : l'abscisse et l'ordonnée.

On obtient les relations suivantes :

- $\overrightarrow{AB} \ (x_B - x_A \ ; \ y_B - y_A)$
- I milieu de [AB] : $I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2} \ ; \ \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Deux vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ sont colinéaires si, et seulement si,

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y = 0$$

Équation cartésienne d'une droite : $ax + by + c = 0$
La droite (AB) est l'ensemble des points $\mathrm{M}(x;y)$ tels que :

$$\det(\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x - x_\mathrm{A} & x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A} \\ y - y_\mathrm{A} & y_\mathrm{B} - x_\mathrm{B} \end{vmatrix} = 0$$

3 Produit scalaire

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par l'une des trois relations suivantes :

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$

2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

3) $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \cos(\vec{u}, \vec{v})$

Propriétés :

Le produit scalaire est :
- commutatif : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- bilinéaire : $\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = ab\,\vec{u} \cdot \vec{v}$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \pm||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$. Le signe dépend du sens des deux vecteurs.

On appelle $\theta = \widehat{\mathrm{BAC}}$, on a alors :

- Si $0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}$ alors $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} > 0$
- Si $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ alors $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$, ABC est alors rectangle en A
- Si $\theta > \dfrac{\pi}{2}$ alors $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} < 0$.

Chapitre 7

Règles sur les inégalités

1 Opérations sur les inégalités

Pour tout a : $x < y \Leftrightarrow x + a < y + a$ *(même sens)*
Pour tout $k > 0$: $x < y \Leftrightarrow kx < ky$ *(même sens)*
Pour tout $k < 0$: $x < y \Leftrightarrow kx > ky$ *(sens contraire)*

Pour x et y de même signe : $x < y \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$ *(sens contraire)*

Pour $x > 0$ et $y > 0$: $x < y \Rightarrow x^2 < y^2$ *(même sens)*
Pour $x > 0$ et $y > 0$: $x < y \Leftrightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$ *(même sens)*
Si f croissante sur I : $x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$ *(même sens)*
Si f décroissante sur I : $x < y \Leftrightarrow f(x) > f(y)$ *(sens contraire)*

Exemples :

- Sachant que $3 < x < 5$, que peut-on en conclure pour $\dfrac{1}{3-x}$?

$$3 < x < 5 \Rightarrow -5 < -x < -3 \Rightarrow -2 < 3 - x < 0 \Rightarrow \frac{1}{3-x} < -\frac{1}{2}$$

- Comment montrer que pour tout $x > 1$, $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$?

  Pour tout $x > 1$

$$0 < x^2 - 1 < x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2-1} < \sqrt{x^2} \Rightarrow \sqrt{x^2-1} < x \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} > \frac{1}{x}$$

Rappels :

- On peut toujours **ajouter** membre à membre deux inégalités.
- On peut **multiplier** membre à membre deux inégalités si tous les termes sont **positifs**.
- On **ne peut pas soustraire ou diviser** membre à membre deux inégalités.

Encadrement de : $x - y$

On détermine d'abord un encadrement de $-y$, puis on effectue la somme membre à membre avec celui de x.

Exemple : $\begin{cases} -2 < x < 3 \\ -4 < y < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 < x < 3 \\ 1 < -y < 4 \end{cases} \Rightarrow -1 < x - y < 7.$

Encadrement de : $\frac{x}{y}$: (bornes de l'encadrement de x et y de même signe)

On détermine d'abord un encadrement de $\frac{1}{y}$, puis il faut s'arranger pour multiplier membre à membre deux encadrements dont tous les termes sont positifs.

Exemples :

1) $\begin{cases} 8 < x < 9 \\ 3 < y < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 < x < 9 \\ \frac{1}{4} < \frac{1}{y} < \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow 2 < \frac{x}{y} < 3.$

2) $\begin{cases} -2 < x < -1 \\ 2 < y < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 < -x < 2 \\ \frac{1}{3} < \frac{1}{y} < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3} < -\frac{x}{y} < 1 \Rightarrow -1 < \frac{x}{y} < -\frac{1}{3}$

Méthode importante à connaître : (valable pour les fonctions et les suites)

Pour montrer que $A < B$, il est dans certains cas plus facile de calculer $A - B$, puis en étudiant son signe de montrer que $A - B < 0$.

Exemple : Comment montrer que si x < 1 alors $\frac{x-8}{2x-9} < 1$?

Pour tout $x < 1$, $\frac{x-8}{2x-9} - 1 = \frac{1-x}{2x-9} < 0$ car $\begin{cases} 1 - x > 0 \\ 2x - 9 < -7 \end{cases}$

2 Inégalités classiques

Pour tout x réel : $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$