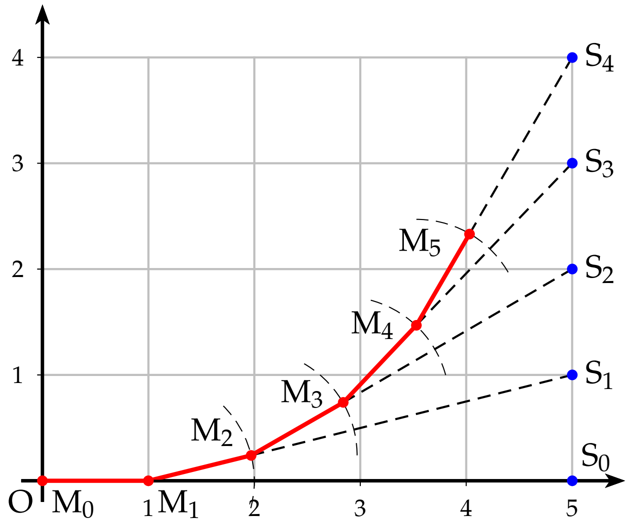
Chien poursuivant un scooter

1) Le chien en M_1 s'oriente vers le point S_1 pendant 1 s, il parcourt alors 1 m, distance que l'on reporte avec un compas qui donne le point M_2. En M_2 le chien s'oriente vers le point S_2 pendant 1 s, il parcours alors 1 m donnant le point M_3 et ainsi de suite.



2) $d_0 = M_0S_0 = 5, \qquad d_1 = M_1S_1 \overset{\text{Pythagore}}{=} \sqrt{4^2 + 1^1} = \sqrt{17}.$

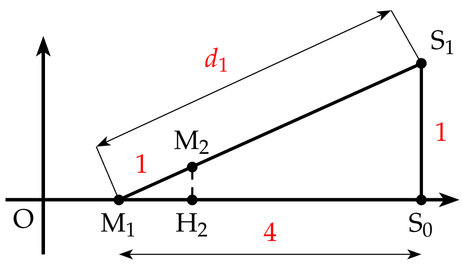
3) Le point M_2 se projette sur (Ox) en H_2.

Les droites (H_2M_2) et (S_0S_1) sont parallèles.

Nous avons une configuration de Thalès, donc :

$$\frac{M_1H_2}{M_1S_0} = \frac{1}{d_1} \Leftrightarrow M_1H_2 = \frac{M_1S_0}{d_1} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\frac{H_2M_2}{S_0S_1} = \frac{1}{d_1} \Leftrightarrow H_2M_2 = \frac{S_0S_1}{d_1} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$



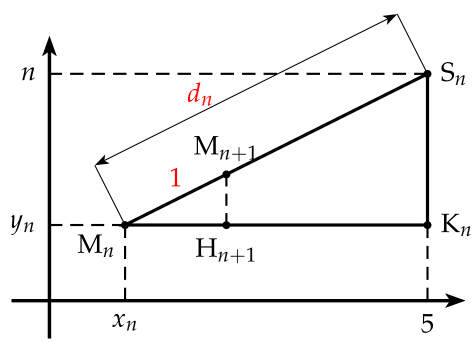
On a : $x_2 = OM_1 + M_1H_2 = 1 + \dfrac{4}{\sqrt{17}}$ et $y_1 = H_2M_2 = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$

4) a) On appelle :

K_n la projection de M_n sur la droite $x = 5$

H_{n+1} la projection de M_{n+1} sur (M_nK_n).

On obtient une configuration de Thalès :



$$\frac{M_nH_{n+1}}{M_nK_n} = \frac{1}{d_n} \Leftrightarrow M_nH_{n+1} = \frac{M_nK_n}{d_n} = \frac{5 - x_n}{d_n}$$

$$\frac{H_{n+1}M_{n+1}}{K_nS_n} = \frac{1}{d_n} \Leftrightarrow H_{n+1}M_{n+1} = \frac{K_nS_n}{d_n} = \frac{n - y_n}{d_n}$$

On en déduit alors :

$$x_{n+1} = x_n + M_nH_{n+1} = x_n + \frac{5 - x_n}{d_n}$$

$$y_{n+1} = y_n + H_{n+1}M_{n+1} = y_n + \frac{n - y_n}{d_n}$$

b) On calcule x_n, y_n puis d_n.

$$d_n = M_nS_n = \sqrt{(5 - x_n)^2 + (n - y_n)^2}$$

Il faut faire un peu attention, lorsque l'on calcule la nouvelle valeur de y_n qui dépend de la valeur de S_{n-1} :

$$y_n = y_{n-1} + \frac{(n - 1) - y_{n-1}}{d_{n-1}}$$

Variables : N, I entiers
X, Y, D réels
Entrées et initialisation
Lire N
$0 \to X$, $0 \to Y$ $5 \to D$
Traitement
pour K variant de 1 à N **faire**
$X + \dfrac{5 - X}{D} \to X$
$Y + \dfrac{K-1-Y}{D} \to Y$
$\sqrt{(5-X)^2 + (K-Y)^2} \to D$
fin
Sorties : Afficher D

5) a) Comme le chien suit le scooter, il cherche à réduire la distance entre lui et le scooter. La suite (d_n) est décroissante

b) La distance étant positive la suite (d_n) est minorée par 0. Comme (d_n) est décroissante, d'après le théorème des suites monotones, la suite d_n converge vers $\ell \geqslant 0$.

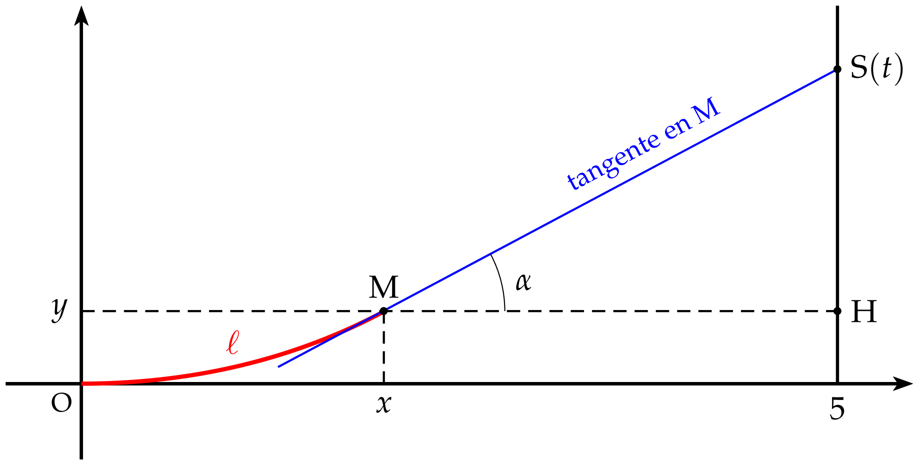
c) On teste le programme avec des valeurs de N de plus en plus grandes :

N	5	10	50	100
D	2,840	2,774	2,773	2,773

La valeur approchée à 10^{-3} de ℓ est de : $\ell \approx 2,773$ m.

Le chien ne rattrapera pas le scooter mais réduira presque de moitié sa distance initiale.

6) **Modèle continu.** Dans la poursuite du chien, dans le modèle précédent, le chien, réactualise sa direction toutes les secondes. Qu'en serait-il s'il réactualisait sa direction à tout instant. Il faut pour cela résoudre une équation différentielle dont la résolution dépasse de loin ce qui est demandé en terminale. Pour compléter cet exercice, nous donnons ici la résolution du modèle continu :



Coefficient directeur de la tangente en M (notation différentielle) : $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan\alpha$

Le chien et le scooter se déplace à la vitesse de 1 ms^{-1}, on a $\ell = t$ et $S(5, t)$.

$$\tan\alpha = \frac{HS}{MH} = \frac{t-y}{5-x} = \frac{\ell - y}{5-x} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\ell - y}{5-x} \quad\Leftrightarrow\quad (5-x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = \ell$$

On dérive par rapport à x :

$$-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (5-x)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}x} \quad\Leftrightarrow\quad (5-x)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}x} \quad (1)$$

or $\mathrm{d}\ell = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \mathrm{d}x\sqrt{1 + \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$ et on pose $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'$

L'équation (1) devient alors : $(5-x)\dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1+y'^2}$

On sépare les variables : $\dfrac{\mathrm{d}y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \dfrac{\mathrm{d}x}{5-x}$ (3)

On intègre par rapport à y' à gauche et à x à droite.

On peut montrer que $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \ln\left(y' + \sqrt{1+y'^2}\right)$

(3) devient alors : $\ln\left(y' + \sqrt{1+y'^2}\right) = -\ln(5-x) + C$

Pour $x = 0$, la vitesse du chien est horizontale soit $y'(0) = 0$, donc $C = \ln 5$

On obtient alors : $\ln\left(y' + \sqrt{1+y'^2}\right) = \ln\left(\dfrac{5}{5-x}\right)$ (4).

L'égalité reste encore vraie en prenant les inverses des logarithmes :

$$\ln\left(\frac{1}{y' + \sqrt{1+y'^2}}\right) = \ln\left(\frac{5-x}{5}\right) \quad\Leftrightarrow\quad \ln\left[-\left(y' - \sqrt{1+y'^2}\right)\right] = \ln\left(\frac{5-x}{5}\right) \quad (5)$$

(4) et (5) donnent : $\begin{cases} y' + \sqrt{1+y'^2} = \dfrac{5}{5-x} \\ y' - \sqrt{1+y'^2} = -\dfrac{5-x}{5} \end{cases}$

On additionne termes à termes : $2y' = \dfrac{5}{5-x} - \dfrac{5-x}{5}$ (6)

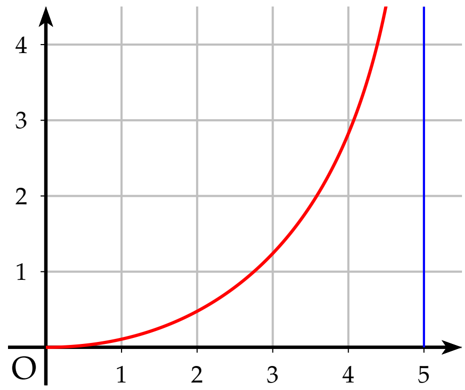
On intègre par rapport à x :

$$2y = -5\ln(5-x) - x + \frac{1}{10}x^2 + C \overset{y(0)=0}{\Rightarrow} C = 5\ln 5$$

On obtient enfin : $y = -\dfrac{5}{2}\ln\left(\dfrac{5-x}{5}\right) - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{20}x^2$

Qui se met sous la forme : $\boxed{y = -2,5\ln(1-0,2x) - 0,5x + 0,05x^2}$

On montre que la fonction y est croissante sur $[0\ ;\ 5[$, et l'on obtient la courbe suivante que l'on appelle une **courbe du chien** ou **courbe de poursuite** :



7) **Distance entre le chien et le scooter en fonction de x.**

$$d(x) = \text{MS} \overset{\text{pythagore}}{=} \sqrt{(5-x)^2 + (t-y)^2} \overset{x\leqslant 5}{=} (5-x)\sqrt{1 + \left(\frac{t-y}{5-x}\right)^2}$$

$$= (5-x)\sqrt{1+y'(x)^2} \qquad \text{car} \quad \frac{\text{d}y}{\text{d}x} = y'(x) = \frac{t-y}{5-x}$$

$$y'(x) \overset{(6)}{=} \frac{5}{2(5-x)} + \frac{5-x}{10} = \frac{25-(5-x)^2}{10(5-x)} = \frac{25-25+10x-x^2}{10(2-x)} = \frac{10x-x^2}{10(5-x)}$$

$$\overset{\div 10}{=} \frac{x-0,1x^2}{5-x} = \frac{x(1-0,1x)}{5-x} \quad (7)$$

$$d(x) \overset{(7)}{=} (5-x)\sqrt{1+\left[\frac{x(1-0,1x)}{5-x}\right]^2} \overset{x\leqslant 5}{=} \sqrt{(5-x)^2 + x^2(1-0,1x)^2}$$

$$= \sqrt{25-10x+x^2+x^2-0,2x^3+0,01x^4} = \sqrt{0,01x^4-0,2x^3+2x^2-10x+25}$$

$$= 0,1\sqrt{x^4-20x^3+200x^2-1000x+2500}$$

On enlève le facteur x^3 en posant : $z = x-5 \iff x = z+5$, on obtient alors :

$$x^4-20x^3+200x^2-1000x+2500 = (z+5)^4-20(z+5)^3+200(z+5)-1000(z+5)+2500$$
$$= z^4+50z^2+625 = (z^2+25)^2$$

On revient à x :
$x^4-20x^3+200x^2-1000x+2500 = [(x-5)^2+25]^2 = (x^2-10x+50)^2$

On a alors : $\boxed{d(x) = 0,1(x^2-10x+50) = 0,1x^2-x+5} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 5} d(x) = 2,5$

La distance entre le chien et le scooter tend vers 2,5 m. Ce résultat est à comparer à la limite de 2,73 m d'une description distraite de la poursuite.

8) **Cas où la vitesse du chien est 2 fois plus importante que le scooter.**

On a alors $\ell = 2t \Leftrightarrow t = \dfrac{\ell}{2}$. L'équation (1) devient : $(5-x)\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}x}$

L'équation (3) devient : $\dfrac{\mathrm{d}y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{\mathrm{d}x}{5-x}$

On intègre par rapport à y' à gauche et à x à droite :

$$\ln\left(y'+\sqrt{1+y'^2}\right) = -\frac{1}{2}\ln(5-x)+C \overset{y'(0)=0}{\Rightarrow} C = \frac{1}{2}\ln 5$$

Les équations (4) et (5) donnent : $\begin{cases} y'+\sqrt{1+y'^2} = \left(\dfrac{5-x}{5}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ y'-\sqrt{1+y'^2} = -\left(\dfrac{5-x}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$

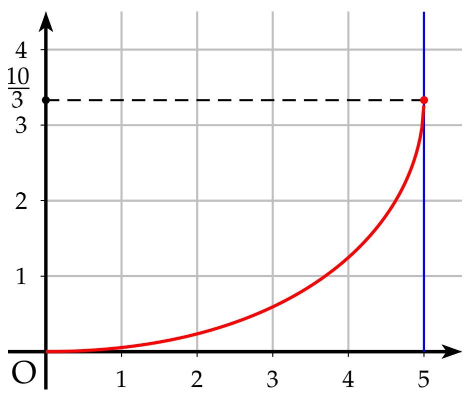
On additionne termes à termes : $2y' = \left(\dfrac{5-x}{5}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(\dfrac{5-x}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$

On intègre par rapport à x :

$$\int\left(\frac{5-x}{5}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = -10\left(\frac{5-x}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \quad et \quad \int\left(\frac{5-x}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \frac{10}{3}\left(\frac{5-x}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$$

On obtient : $y = -5\left(\dfrac{5-x}{5}\right)^{\frac{1}{2}} + \dfrac{5}{3}\left(\dfrac{5-x}{5}\right)^{\frac{3}{2}} + C \overset{y(0)=0}{\Rightarrow} C = \dfrac{10}{3}$

On peut mettre y sous la forme : $y = (5-x)\left(\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{5-x}{5}} - \sqrt{\dfrac{5}{5-x}}\right) + \dfrac{10}{3}$



Le chien rattrape le scooter au point $\left(5\,,\,\dfrac{10}{3}\right)$