# Correction contrôle de mathématiques

## Du lundi 25 février 2013

## EXERCICE 1

**ROC** **(6 points)**

1) Cf cours

2) a) $f$ de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ donc $F = -\dfrac{1}{u}$. $f(x) = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{3}{(3x-1)^2}\right)$ donc $F(x) = \dfrac{-4}{3(3x-1)}$

b) $f$ de la forme $u'u$ donc $F = \dfrac{1}{2}u$. $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln x$ donc $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln^2 x$

c) $f$ de la forme $u'e^u$ donc $F = e^u$. $f(x) = -\dfrac{1}{2}\left(-2e^{1-2x}\right)$ donc $F(x) = -\dfrac{1}{2}e^{1-2x}$

d) $f$ de la forme $\dfrac{u'}{u}$ donc $F = \ln|u|$. $f(x) = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right)$ donc $F(x) = \dfrac{3}{2}\ln(x^2-1)$

e) $f$ de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ donc $F = 2\sqrt{u}$. $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ donc $F(x) = 2\sqrt{x^2+x+1}$

## EXERCICE 2

**Intégrale** **(3 points)**

1) On développe :

$$\begin{aligned}
\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1} &= \frac{a(x^2-1) + bx(x-1) + cx(x+1)}{x(x+1)(x-1} \\
&= \frac{ax^2 - a + bx^2 - bx + cx^2 + cx}{x(x+1)(x-1} \\
&= \frac{(a+b+c)x^2 + (-b+c)x - a}{x(x+1)(x-1}
\end{aligned}$$

On identifie à $f(x)$. On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} a+b+c = 0 \\ -b+c = 0 \\ -a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = c \\ 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \dfrac{1}{2} \\ c = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

On a donc : $f(x) = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2(x+1)} + \dfrac{1}{2(x-1)}$

2) Les différents termes de $f$ sont de la forme $\dfrac{u'}{u}$ qui donne $\ln|u|$. On obtient alors :

$$F(x) = -\ln x + \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1)$$

3) On a alors :

$$\begin{aligned}
I &= \int_2^3 f(x)\,dx \\
&= \left[-\ln x + \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1)\right]_2^3 \\
&= -\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 4 + \frac{1}{2}\ln 2 - \left(-\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 1\right) \\
&= -\ln 3 + \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 + \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3 \\
&= \frac{5}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3
\end{aligned}$$

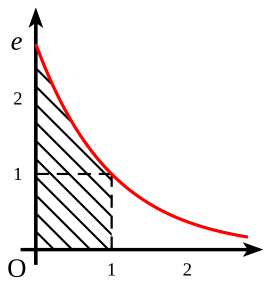
## Exercice 3

**Intégrale et suite** **(6 points)**

1) La primtive de $e^{1-x}$ est $-e^{1-x}$, on a alors :

$$I_0 = \int_0^1 e^{1-x}\,dx = \left[-e^{1-x}\right]_0^1 = -e^0 + e = e - 1$$

2) $I_0$ représente l'aire du domaine délimité par la courbe de $e^{1-x}$, les axes et la droite d'équation $x = 1$. Voir la partie hachurée ci-contre




3) On a : $I_1 = I_0 - 1 = e - 2$ et $I_2 = 2I_1 - 1 = 2e - 4 - 1 = 2e - 5$

4) Ce programme calcule les termes successifs de $I_n$ avec la relation de récurrence du 3). Il effectue 10 boucles en partant de $I_0$. Il calcule donc $I_{10}$
Le programme donne : $X = I_{10} \simeq 0,099$.
On peut faire la conjecture que la suite $(I_n)$ converge vers 0.

5) a) On a :

$$\begin{array}{rl}
 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\
 & -1 \leqslant -x \leqslant 0 \\
 & 0 \leqslant 1 - x \leqslant 1 \\
 & 1 \leqslant e^{1-x} \leqslant e \quad \text{car } x \mapsto e^x \text{ est croissante} \\
(\times x^n \geqslant 0) & x^n \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant x^n e
\end{array}$$

b) On intègre l'inégalité. On obtient alors :

$$\int_0^1 x^n\,dx \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 x^n\,dx$$

$$\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leqslant I_n \leqslant \left[\frac{x^{n+1}e}{n+1}\right]_0^1$$

$$\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e}{n+1} = 0$

D'après le théorème des gendames, la suite $(I_n)$ converge vers 0.

## EXERCICE 4

**Volume** **(3 points)**

1) D'après la définition de ce solide de révolution, on :

$$z = e^{1-r} \quad \Leftrightarrow \quad ln\, z = 1 - r \quad \Leftrightarrow \quad r = 1 - \ln z$$

On a alors : $\displaystyle\int_1^e \pi r^2(z)\,\mathrm{d}z = \pi \int_1^e (1-\ln z)^2\,\mathrm{d}z$

2) On a :

$$\begin{aligned} F(x) &= 5x - 4x\ln x + x\ln^2 x \\ F'(x) &= 5 - 4\ln x - 4x \times \frac{1}{x} + \ln^2 x + 2x \times \frac{1}{x}\ln x \\ &= 5 - 4\ln x - 4 + \ln^2 x + 2\ln x \\ &= 1 - 2\ln x + \ln^2 x \\ &= (1-\ln x)^2 = f(x) \end{aligned}$$

La fonction $F$ est donc bien une primitive de $f$.

3) On a alors :

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^e (1 - lnz)^2 \\ &= \pi \left[5z - 4z\ln z + z\ln^2 z\right]_1^e \\ &= \pi\left[5e - 4e\ln e + e\ln^2 e - (5 - 4\ln 1 + \ln^2 1)\right] \\ &= \pi(5e - 4e + e - 5) \\ &= \pi(2e - 5) \\ &\simeq 1,372 \end{aligned}$$

## EXERCICE 5

**Cinématique** **(2 points)**

1) D'après la définition de la valeur moyenne, on a :

$$\begin{aligned} v_{\text{moy}} &= \frac{1}{30}\int_0^{30} v(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{30}\int_0^{30} (t^2 + 5t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{30}\left[\frac{t^3}{3} + \frac{5t^2}{2}\right]_0^{30} \\ &= \frac{1}{30}\left(\frac{27\,000}{3} + \frac{5\times 900}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{\text{moy}} &= \frac{1}{30}(9\,000 + 2\,250) \\ &= 375 \text{ m.s}^{-1} \end{aligned}$$

2) La distance parcourue $d$ est alors :

$$d = v_{\text{moy}} \times t = 375 \times 30 = 11\,250 \text{ m} = 11,25 \text{ km}$$