

COMBINAISONS AU POKER

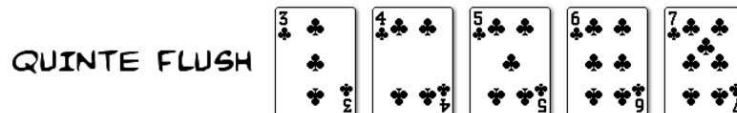
1 La définition des combinaisons

Un jeu de 52 cartes est formé de 4 couleurs (trèfle, carreau, coeur, pique) contenant chacune 13 figures (2, 3, ..., 10, valet, dame, roi, as). L'as est la plus forte carte mais il peut parfois être considéré comme la plus faible (Quinte et quinte flush).

Un jeu de 32 cartes est formé de 4 couleurs (trèfle, carreau, coeur, pique) contenant chacune 8 figures (7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as).

Les combinaisons que l'on peut faire au poker sont :

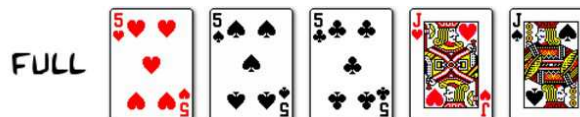
- La quinte flush : 5 cartes consécutives d'une même couleur :



- Le carré : 4 cartes de la même valeur



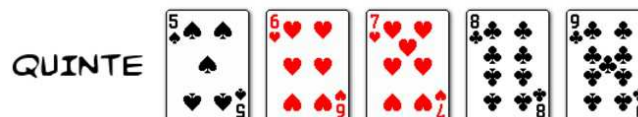
- Le full : Trois cartes de la même valeur d'une part et deux cartes de même valeur d'autre part :



- La couleur ou flush : 5 cartes de la même couleur



- La quinte ou suite : 5 cartes consécutives de différentes couleurs :



- Le brelan : trois cartes de la même valeur mais qui ne forme pas avec les autres cartes un carré ou un full.



- La double paire : 2 séries différentes de deux cartes de même valeur qui ne forment pas avec les autres cartes un full.



- La paire : 2 cartes de même valeur qui ne forment pas avec les autres cartes une double paire, un full ou un carré.



2 Nombre de mains de chaque combinaisons

1) Nombre total de mains

- Avec un jeu de 52 cartes : $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$ mains

- Avec un jeu de 32 cartes : $\binom{32}{5} = 201\,376$ mains

2) La quinte flush

- Avec un jeu de 52 cartes : il faut choisir la figure du début 10 choix (de l'as au 10) et la couleur, 4 choix. On a donc :

$$10 \times 4 = 40 \text{ mains}$$

- Avec un jeu de 32 cartes, il y a 4 choix de figures (du 7 au 10) et 4 choix de couleurs, soit

$$4 \times 4 = 16 \text{ mains}$$

3) Le carré

- Avec un jeu de 52 cartes : Il faut choisir la figure : 13 choix puis la dernière carte parmi les 48 restantes. On a donc :

$$13 \times 48 = 624 \text{ mains}$$

- Avec un jeu de 32 cartes : on a 8 choix pour la figures et il reste 28 choix pour la dernière carte, soit :

$$8 \times 28 = 224 \text{ mains}$$

4) Le full

- Avec un jeu de 52 cartes : on choisit la figure des trois cartes identiques soit 13 choix puis on en choisit 3 parmi les 4, on choisit ensuite la figure des deux cartes identiques soit 12 choix, on en choisit alors 2 parmi les 4, on a donc :

$$13 \times \binom{4}{3} \times 12 \times \binom{4}{2} = 13 \times 4 \times 12 \times 6 = 3\,744 \text{ mains}$$

- Avec un jeu de 32 cartes : on a 8 choix pour les trois cartes identiques et 7 pour les deux identiques, soit :

$$8 \times \binom{4}{3} \times 7 \times \binom{4}{2} = 8 \times 4 \times 7 \times 6 = 1\,344 \text{ mains}$$

5) La couleur

- Avec un jeu de 52 cartes : on choisit la couleur soit 4 choix puis on choisit 5 cartes dans les 13 cartes de cette couleur sans oublier de soustraire les quintes flush, on a donc :

$$4 \times \binom{13}{5} - 40 = 4 \times 1287 - 40 = 5\,108 \text{ mains}$$

- Avec un jeu de 32 cartes : 8 cartes dans une couleur et 16 quintes flush, soit :

$$4 \times \binom{8}{5} - 16 = 4 \times 56 - 16 = 208 \text{ mains}$$

6) La quinte ou suite

- Avec un jeu de 52 cartes : on choisit la figure de départ soit 10 choix (de l'as au 10) puis on choisit une carte dans les 4 de même figure 5 fois sans oublier d'enlever les quintes flush, on a donc :

$$10 \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} - 40 = 10 \times 4^5 - 40 = 10\,200 \text{ mains}$$

- Avec un jeu de 32 cartes : 4 choix pour le figure de départ puis 5 fois une carte parmi 4 moins les quintes flush, soit :

$$4 \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} - 16 = 4^6 - 16 = 4\,080 \text{ mains}$$

7) Le brelan

- Avec un jeu de 52 cartes : on choisit la figure des trois cartes identiques soit 13 choix puis on en choisit 3 parmi les 4 enfin on prend 2 autres cartes dans les 48 restantes sans oublier d'enlever les fulls :

$$13 \times \binom{4}{3} \times \binom{48}{2} - 3744 = 13 \times 4 \times 1128 - 3744 = 54\,912 \text{ mains}$$

- Avec un jeu de 32 cartes : 8 choix pour la figure, puis on prend 3 cartes parmi ces 4 et enfin deux cartes parmi les 28 restantes :

$$8 \times \binom{4}{3} \times \binom{28}{2} - 1344 = 8 \times 4 \times 378 - 1344 = 10\,752 \text{ mains}$$

8) La double paires

- Avec un jeu de 52 cartes : On choisit les deux jeux de paires parmi les 13 figures, puis on choisit deux fois deux cartes parmi ces deux jeux et enfin une carte parmi les 44 restantes, on a donc :

$$\binom{13}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{44}{1} = 78 \times 6^2 \times 44 = 123\,552 \text{ mains}$$

- Avec un jeu de 32 cartes : on choisit les 2 jeux de paire parmi les 8 figures, puis on choisit deux fois 2 cartes parmi ces deux jeux et enfin une carte parmi les 24 restantes, soit :

$$\binom{8}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{24}{1} = 28 \times 6^2 \times 24 = 24\,192 \text{ mains}$$

⚠ Si vous choisissez une paire puis une autre, vous comptez deux fois une même main !

9) La paire

- Avec un jeu de 52 cartes : on choisit la figure pour la paire soit 13 choix, puis on prend 2 cartes parmi cette figure, on choisit ensuite les 3 figures différentes pour les trois cartes restantes où on en choisit une sur quatre :

$$13 \times \binom{4}{2} \times \binom{12}{3} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} = 13 \times 6 \times 220 \times 4^3 = 1\,098\,240 \text{ mains}$$

- Avec un jeu de 32 cartes : 8 choix de figure pour la paire et 7 choix de figure pour les autres cartes, soit :

$$8 \times \binom{4}{2} \times \binom{7}{3} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} = 8 \times 6 \times 35 \times 4^3 = 107\,520 \text{ mains}$$

3 Tableau récapitulatif

Combinaison	Jeu de 52 cartes	Jeu de 32 cartes
Quinte flush	40	16
Carré	624	224
Full	3 744	1 344
Couleur	5 108	208
Suite	10 200	4 080
Brelan	54 912	10 752
Double paires	123 552	24 152
Paire	1 098 240	107 520
Total mains	2 598 960	201 376

On remarque que la couleur dans un jeu de 32 cartes apparaît moins souvent que le full et même le carré ! Sinon l'ordre est respecté dans les autres combinaisons.

Remarque : Pour calculer les probabilités des différentes combinaisons de poker, il faut diviser le nombre de mains d'une combinaison sur le nombre total de mains. Par exemple, pour un brelan (B), on a :

- Avec un jeu de 52 cartes : $P(B) = \frac{54\,912}{2\,598\,960} = 0,021\,128 \text{ } (\simeq 2 \%)$
- Avec un jeu de 32 cartes : $P(B) = \frac{10\,752}{201\,376} = 0,053\,393 \text{ } (\simeq 5 \%)$

Il est plus facile d'obtenir un brelan avec un jeu de 32 cartes qu'avec un jeu de 52 !