Méthode de Monte Carlo

EXERCICE 1

Asie juin 2017

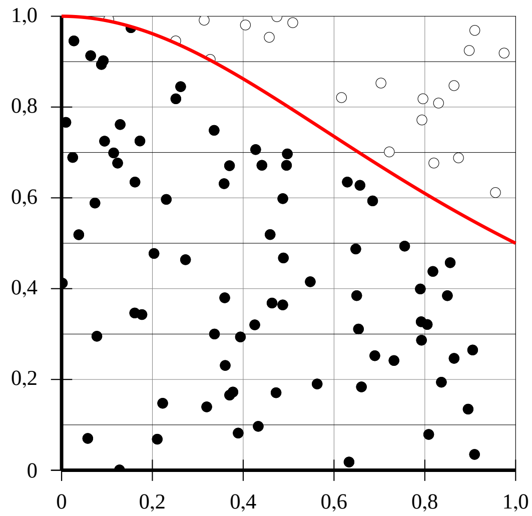
Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

Le but est d'évaluer l'intégrale J à l'aide de la méthode probabiliste décrite ci-après.
On choisit au hasard un point M$(x\,;\,y)$ en tirant de façon indépendante ses coordonnées x et y au hasard selon la loi uniforme sur $[0\,;\,1]$.
On admet que la probabilité p qu'un point tiré de cette manière soit situé sous la courbe $\mathscr{C}_g$ est égale à l'intégrale J.
En pratique, on initialise un compteur c à 0, on fixe un entier naturel n et on répète n fois le processus suivant :

- on choisit au hasard et indépendamment deux nombres x et y, selon la loi uniforme sur $[0\,;\,1]$;
- si M$(x\,;\,y)$ est au-dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$ on incrémente le compteur c de 1.

On admet que $f = \dfrac{c}{n}$ est une valeur approchée de J.

La figure ci-contre illustre la méthode présentée pour $n = 100$.
100 points ont été placés aléatoirement dans le carré.
Les disques noirs correspondent aux points sous la courbe, les disques blancs aux points au-dessus de la courbe.
Le rapport du nombre de disques noirs par le nombre total de disques donne une estimation de l'aire sous la courbe.



1) Compléter l'algorithme ci-après pour qu'il affiche une valeur approchée de J.

Variables : n, c, f, i, x, y nombres
Entrées et initialisation
  Lire la valeur de n
  c prend la valeur ......
Traitement
  pour i allant de 1 à ...... **faire**
    x prend une valeur aléatoire entre 0 et 1
    y prend ....
    si ...... **alors**
      ... prend la valeur ...
    fin
  fin
  f prend la valeur ......
Sorties : Afficher f

2) Ecrire le programme puis donner la valeur obtenue pour $n = 1\ 000$

3) Pour $n = 1\ 000$, l'algorithme ci-dessus a donné pour résultat : $f = 0,781$.
Donner un intervalle de confiance, au niveau de 95 %, de la valeur exacte de J.

L'intervalle de confiance I à 95 % est défini par : $\mathrm{I} = \left[f_{\text{obs}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f_{\text{obs}} + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right]$.

4) Quelle doit-être, au minimum, la valeur de n pour que l'intervalle de confiance, au niveau de 95 %, ait une amplitude inférieure ou égale à 0,02 ?