Révision : Intégrales et primitives

EXERCICE 1

Antilles-Guyane juin 2016

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\,e^{1-x^2}$

1) Trouver une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \left(e^{1-x} - x\,e^{1-x^2}\right)\mathrm{d}x$.
3) Interpréter graphiquement ce résultat.

EXERCICE 2

Nouvelle-Calédonie nov 2016

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

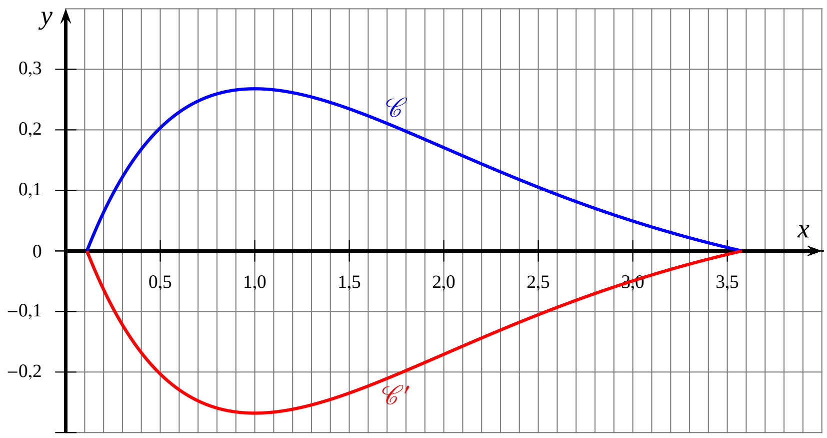
$$f(x) = x\,e^{-x} - 0,1.$$

1) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2) Étudier les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$ et dresser le tableau de variations.
3) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
4) On admet l'existence du nombre réel strictement positif β tel que $\alpha < \beta$ et $f(\beta) = 0$.

   On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[\alpha\,;\,\beta]$ dans un repère orthogonal et $\mathscr{C}'$ la courbe symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.

   L'unité sur chaque axe représente 5 mètres.

   Ces courbes sont utilisées pour délimiter un massif floral en forme de flamme de bougie sur lequel seront plantées des tulipes.



   a) Démontrer que la fonction F, définie sur l'intervalle $[\alpha\,;\,\beta]$ par

   $$F(x) = -(x+1)e^{-x} - 0,1x$$

   est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[\alpha\,;\,\beta]$.

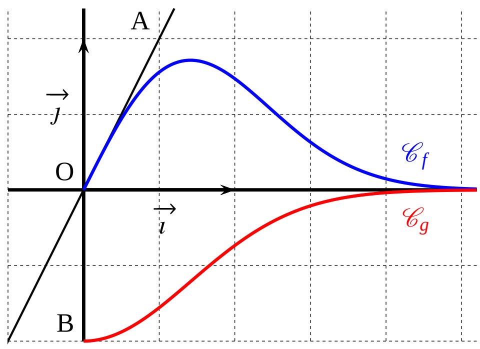
b) Calculer, en unités d'aire, une valeur arrondie à $0,01$ près de l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.
On utilisera les valeurs arrondies à $0,001$ près suivantes : $\alpha \approx 0,112$ et $\beta \approx 3,577$.

c) Sachant que l'on peut disposer 36 plants de tulipes par mètre carré, calculer le nombre de plants de tulipes nécessaire à la réalisation de ce massif.

Exercice 3

Amérique du Sud nov 2016

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ données ci-dessous, sont les représentations graphiques, dans un repère orthonormé $(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, de deux fonctions f et g définies sur $[0\ ;\ +\infty[$.



On considère les points A(0,5 ; 1) et B(0 ; −1) dans le repère $(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On sait que O appartient à $\mathscr{C}_f$ et que la droite (OA) est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point O.

1) On suppose que la fonction f s'écrit sous la forme $f(x) = (ax+b)\text{e}^{-x^2}$ où a et b sont des réels. Déterminer les valeurs exactes des réels a et b, en détaillant la démarche.

Désormais, on considère que $f(x) = 2x\text{e}^{-x^2}$ pour tout x appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$

1) a) On admettra que, pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} \times \dfrac{x^2}{e^{x^2}}$.
Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Dresser, en le justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2) La fonction g dont la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ passe par le point B(0 ; −1) est une primitive de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

a) Déterminer l'expression de $g(x)$.

b) Soit m un réel strictement positif.
Calculer $I_m = \displaystyle\int_0^m f(t)\,\text{d}t$ en fonction de m.

c) Déterminer $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} I_m$.

3) a) Justifier que f est une fonction densité de probabilité sur $[0\ ;\ +\infty[$.

b) Soit X une variable aléatoire continue qui admet la fonction f comme densité de probabilité. Justifier que, pour tout réel x de $[0\ ;\ +\infty[$, : $P(X \leqslant x) = g(x) + 1$.

c) En déduire la valeur exacte du réel α tel que $P(X \leqslant \alpha) = 0,5$.

d) Sans utiliser une valeur approchée de α, construire dans le repère ci-avant le point de coordonnées $(\alpha\ ;\ 0)$ en laissant apparents les traits de construction.
Hachurer ensuite la région du plan correspondant à $P(X \leqslant \alpha)$.