

Révision : Fonctions exponentielle et logarithme. Intégration

EXERCICE 1

N^{le} Calédonie nov 2017

Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses en justifiant votre réponse.

- 1) Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par : $f(x) = 2e^x - e^{2x}$.

Soit $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

On admet que, pour tout x appartenant à $[0 ; \ln(2)]$, $f(x)$ est positif.

Proposition 1 : L'aire du domaine délimité par les droites d'équations $x=0$ et $x= \ln(2)$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$ est égale à 1 unité d'aire.

- 2) Soit n un entier strictement positif.

Soit la fonction f_n définie sur l'ensemble des nombres réels par $f_n(x) = 2ne^x - e^{2x}$ et $\mathcal{C}_n$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

On admet que f_n est dérivable et que $\mathcal{C}_n$ admet une tangente horizontale en un unique point S_n .

Proposition 2 : Pour tout entier strictement positif n , l'ordonnée du point S_n est n^2 .

EXERCICE 2

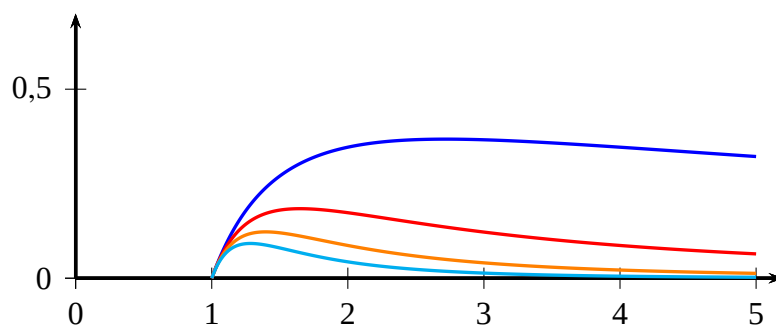
Liban mai 2018

On considère, pour tout entier $n > 0$, les fonctions f_n définies sur l'intervalle $[1 ; 5]$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}$$

Pour tout entier $n > 0$, on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes $\mathcal{C}_n$ pour n appartenant à $\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.



- 1) Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel $x \in [1 ; 5]$: $f'_n(x) = \frac{1 - n \ln(x)}{x^{n+1}}$.

- 2) Pour tout $n > 0$, on admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle $[1; 5]$.
On note A_n le point de la courbe $\mathcal{C}_n$ ayant pour ordonnée ce maximum.

Montrer que tous les points A_n appartiennent à une courbe Γ d'équation : $y = \frac{1}{e} \ln(x)$.

- 3) a) Montrer que, pour tout $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle $[1; 5]$: $0 \leq \frac{\ln(x)}{x^n} \leq \frac{\ln(5)}{x^n}$.

b) Montrer que pour tout $n > 1$: $\int_1^5 \frac{1}{x^n} dx = \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{5^{n-1}} \right)$.

- c) Pour tout entier $n > 0$, on s'intéresse à l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface sous la courbe f_n , c'est-à-dire l'aire du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$ et la courbe $\mathcal{C}_n$.

Déterminer la valeur limite de cette aire quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 3

Amérique du Nord mai 2018

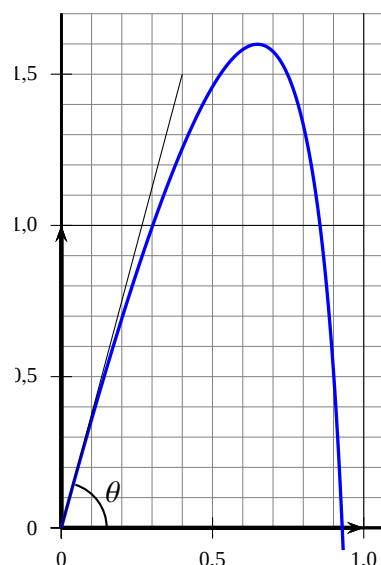
Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir θ par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.

Comme le projectile ne se déplace pas dans l'air mais dans un fluide, le modèle parabolique usuel n'est pas adopté.

On modélise ici le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1[$ par :

$$f(x) = bx + 2 \ln(1 - x)$$

où b est un paramètre réel supérieur ou égal à 2, x est l'abscisse du projectile, $f(x)$ son ordonnée, toutes les deux exprimées en mètres.



- 1) La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 1[$. On note f' sa fonction dérivée.
On admet que la fonction f possède un maximum sur l'intervalle $[0; 1[$ et que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1[$:

$$f'(x) = \frac{-bx + b - 2}{1 - x}$$

Montrer que le maximum de la fonction f est égal à $b - 2 + 2 \ln\left(\frac{2}{b}\right)$.

- 2) Déterminer pour quelles valeurs du paramètre b la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.
3) Dans cette question, on choisit $b = 5,69$.

L'angle de tir θ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 comme indiqué sur le schéma donné ci-dessus.

Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle θ .