Révision : Probabilité

EXERCICE 1

Amérique du Nord 2019

Dans cet exercice et sauf mention contraire, les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

Une usine fabrique des tubes.

Partie A

Les questions **1)** *et* **2)** *sont indépendantes.*

On s'intéresse à deux types de tubes, appelés tubes de type 1 et tubes de type 2.

1) Un tube de type 1 est accepté au contrôle si son épaisseur est comprise entre 1,35 millimètre et 1,65 millimètre.

   a) On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tube de type 1 prélevé au hasard dans la production d'une journée, associe son épaisseur exprimée en millimètres. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 1,5 et d'écart-type 0,07.
   On prélève au hasard un tube de type 1 dans la production de la journée.

   Calculer la probabilité que le tube soit accepté au contrôle.

   b) L'entreprise désire améliorer la qualité de la production des tubes de type 1. Pour cela, on modifie le réglage des machines produisant ces tubes.
   On note X_1 la variable aléatoire qui, à chaque tube de type 1 prélevé dans la production issue de la machine modifiée, associe son épaisseur. On suppose que la variable aléatoire X_1 suit une loi normale d'espérance $1,5$ et d'écart-type σ_1.
   Un tube de type 1 est prélevé au hasard dans la production issue de la machine modifiée.

   Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_1 pour que la probabilité que ce tube soit accepté au contrôle soit égale à 0,98.

2) Une machine produit des tubes de type 2. Un tube de type 2 est dit « conforme pour la longueur » lorsque celle-ci, en millimètres, appartient à l'intervalle $[298 ; 302]$. Le cahier des charges établit que, dans la production de tubes de type 2, une proportion de 2 % de tubes non « conformes pour la longueur » est acceptable.

   On souhaite décider si la machine de production doit être révisée. Pour cela, on prélève au hasard dans la production de tubes de type 2 un échantillon de 250 tubes dans lequel 10 tubes se révèlent être non « conformes pour la longueur ».

a) Donner un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des tubes non « conformes pour la longueur » dans un échantillon de 250 tubes.

b) Décide-t-on de réviser la machine ? Justifier la réponse.

Partie B

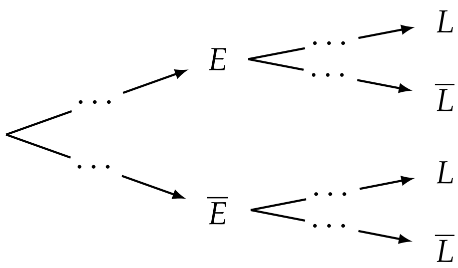
Des erreurs de réglage dans la chaîne de production peuvent affecter l'épaisseur ou la longueur des tubes de type 2.
Une étude menée sur la production a permis de constater que :

- 96 % des tubes de type 2 ont une épaisseur conforme ;
- parmi les tubes de type 2 qui ont une épaisseur conforme, 95 % ont une longueur conforme ;
- 3,6 % des tubes de type 2 ont une épaisseur non conforme et une longueur conforme.

On choisit un tube de type 2 au hasard dans la production et on considère les événements :

- E : « l'épaisseur du tube est conforme » ;
- L : « la longueur du tube est conforme ».

On modélise l'expérience aléatoire par un arbre pondéré :



1) Recopier et compléter entièrement cet arbre.

2) Montrer que la probabilité de l'événement L est égale à 0,948.

EXERCICE 2

Liban 2019

Les deux parties 1 et 2 sont indépendantes.

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.
On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.

Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

- à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est 0,9 ;
- si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,95 ;
- si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,2.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'évènement « le client rapporte la bouteille de son panier de la n-ième semaine ».

1) a) Modéliser la situation étudiée pour les deux premières semaines à l'aide d'un arbre pondéré qui fera intervenir les évènements R_1 et R_2.

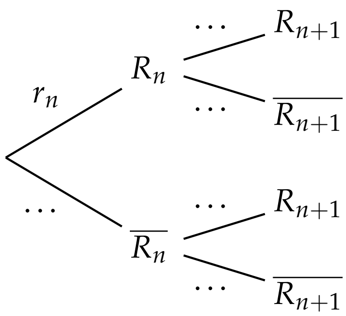
   b) Déterminer la probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine.

   c) Montrer que la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine est égale à $0,875$.

   d) Sachant que le client a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine ?
   On arrondira le résultat à 10^{-3}.

2) Pour tout entier naturel n non nul, on note r_n la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la n-ième semaine. On a alors $r_n = p\left(R_n\right)$.

   a) Recopier et compléter l'arbre pondéré (aucune justification n'est attendue) :



   b) Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0,75 r_n + 0,2$.

   c) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul,
$$r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8.$$

   d) Calculer la limite de la suite (r_n).
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.