Révision : fonctions exponentielle et logarithme

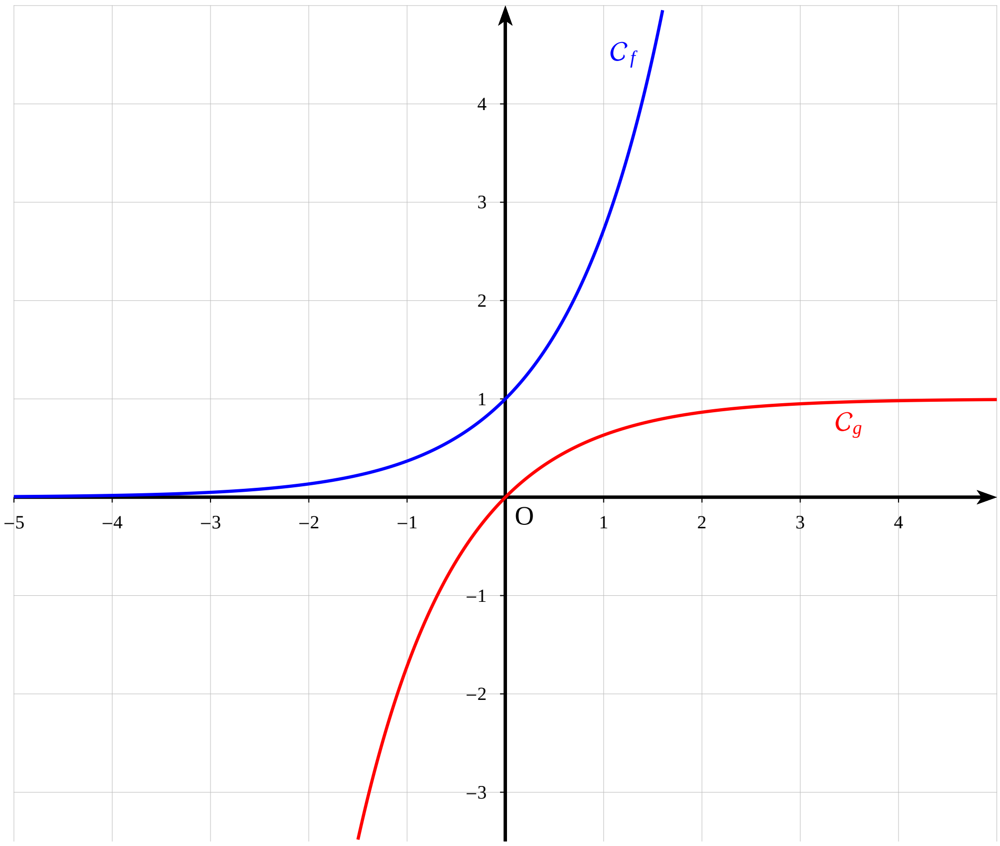
EXERCICE 1

Asie juin 2013

On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par : $f(x) = e^x$ et $g(x) = 1 - e^{-x}$
Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, sont fournies en annexe.

Partie A

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer aux mieux ces tangentes sur la figure ci-dessous.



Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.
On note $\mathcal{D}$ l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a et tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B d'abscisse b.

1) a) Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.

b) Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B.

c) En déduire que $b = -a$.

2) Démontrer que le réel a est solution de l'équation : $2(x-1)\mathrm{e}^x + 1 = 0$

Partie C

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = 2(x-1)\mathrm{e}^x + 1$

1) a) Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.

   b) Calculer la dérivée de la fonction φ, puis étudier son signe.

   c) Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\varphi(0)$.

2) a) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

   b) On note α la solution négative de l'équation $\varphi(x) = 0$ et β la solution positive de cette équation.
   À l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de α et β arrondies au centième.

Partie D

Dans cette partie, on démontre l'existence de ces tangentes communes, que l'on a admise dans la partie B.
On note E le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse α et F le point de la courbe $\mathcal{C}_g$ d'abscisse $-\alpha$ (α est le nombre réel défini dans la partie C).

1) Démontrer que la droite (EF) est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point E.

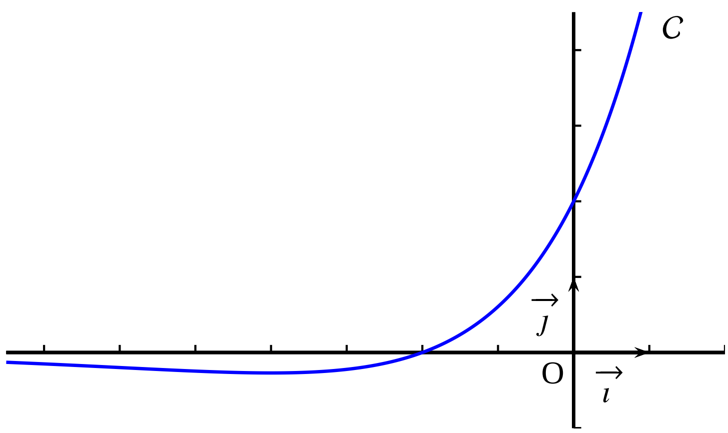
2) Démontrer que (EF) est tangente à $\mathcal{C}_g$ au point F.

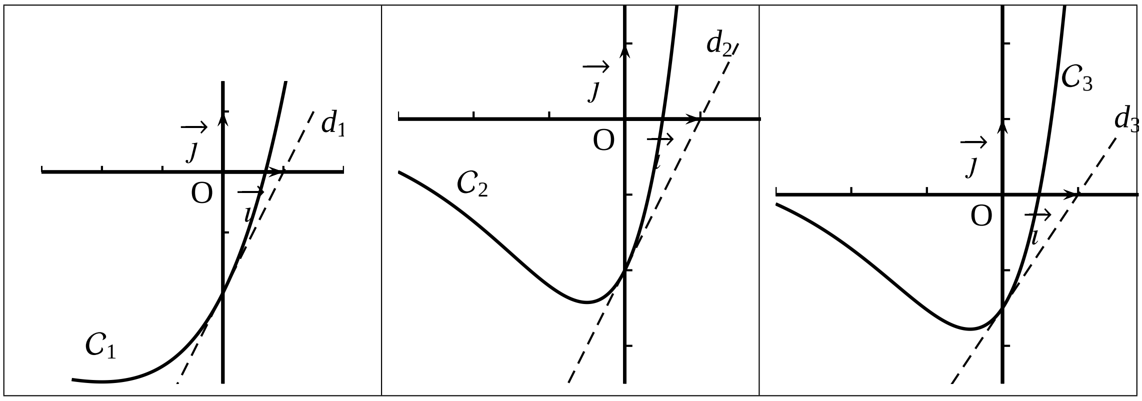
Exercice 2

Métropole septembre 2013 : extrait

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathcal{C}$ et trois autres courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ avec la tangente en leur point d'abscisse 0.





1) Donner par lecture graphique, le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
2) On désigne par F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   a) À l'aide de la courbe $\mathcal{C}$, déterminer $F'(0)$ et $F'(-2)$.
   b) L'une des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ est la courbe représentative de la fonction F.
      Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.

Exercice 3

ROC

1) Définition de la fonction exponentielle. Montrer l'unicité de la fonction exponentielle.
2) Quelle est la relation fonctionnelle de l'exponentielle. Montrer cette relation.
3) Donner les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$. Démontrer ces deux limites.
4) Donner les limites de références de la fonction exponentielle.
5) Donner la formule du logarithme du produit. Démontrer cette formule.
6) Donner les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x$. Démontrer ces deux limites.
7) Donner les limites de références de la fonction logarithme.
8) Donner l'allure des fonctions exponentielle et logarithme. Dresser le tableau de variation de ces deux fonctions.