Centres étrangers 12 juin 2013

Mathématiques

Exercice 1 **(6 points)**

Partie A

1) Il faut calculer l'espérance mathématique : $\mathrm{E}(T) = \dfrac{1}{\lambda} = 5000$

   La durée de vie moyenne d'une vanne est de 5000 heures

2) $P(T > 6000) = e^{-6000\lambda} = e^{-1,2} \simeq 0,301$

Partie B

1) Sur chaque branche F_1, F_2 et F_3 comme ces événements sont indépendants, on a une probabilité de 0,3. Pour la branche reliant $\overline{F}_1$, on a une probabilité de 0,7.

2) $P(E) = P(F_1)+P(\overline{F}_1 \cap F_2 \cap F_3) = P(F_1)+P(\overline{F_1}) \times P(F_2) \times P(F_3) = 0,3+0,7 \times 0,3^2 = 0,363$

3) $P_E(F_1) = \dfrac{P(E \cap F_1)}{P(E)} = \dfrac{P(F_1)}{P(E)} = \dfrac{0,3}{0,363} \simeq 0,826$

Partie C

1) on a : $p = 0,02$ et $n = 400$. On trouve alors :

$$I = \left[p - 1.96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1.96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = [0,006; 0,034]$$

2) $f_{obs} = \dfrac{10}{400} = 0,025 \in I$
   On ne peut donc pas rejeter l'hypothèse de l'industriel.

Partie D

1) Deux façons de calculer la probabilité, soit on revient à la loi normale centrée réduite de varaible X (fonction Φ) soit on rentre directement les données dans la calculatrice

$$P(760 \leqslant D \leqslant 840) = P(-1 \leqslant X \leqslant 1) = 2\Phi(1) - 1 \simeq 0,683$$

2) $P(D \,\mathrm{inf}\, 880) = P(X \leqslant 2) = \Phi(2) = 0,977$

3) Pour être en rupture de stock, on doit calculer la probabilité :
   $P(D > 880) = 1 - P(D \leqslant 880) = 0,023 = 2,3$ %.

   L'ndustriel a donc tort

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

EXERCICE 2 (4 points)

Affirmation 1 : faux : Un plan parallèle à $\mathscr{P}$ a un vecteur normal colinéaire à $\vec{n}(2;1;-2)$
Or le plan d'équation : $2x+y+2z-24=0$ a comme vecteur normal $\vec{n'}(2;1;2)$. Les coordonnées de $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont manifestement pas proportionnelles. Les plan ne sont donc pas parallèles

Affirmation 2 : vrai : La représentation donnée est bien celle d'une droite, il reste à vérifier que l'on peut bein trouver une valeur de t pour que les points A et C appartiennent à la droite.

- Pour A : avec $t=-1$ on retrouve le point A
- Pour B : avec $t=3$ on retrouve le point C

Affirmation 3 : faux On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DE}(5;-4;3)$, on obtient alors une représentation paramétrique de (DE) :

$$(DE):\quad \begin{cases} x=2+5t \\ y=7-4t \\ z=-6+3t \end{cases}$$

On remplace alors les coordonnées de la droite (DE) dans l'équation du plan $\mathscr{P}$, On trouve alors :

$$2(2+5t)+(7-4t)-2(-6+3t)-5=0 \quad \Leftrightarrow \quad 4+10t+7-4t+12-6t-5=0$$

On trouve alors $0t=-18$ impossible. La droite (DE) et le plan $\mathscr{P}$ sont strictement parallèles.

Affirmation 4 : vrai Une droite est orthogonale à un plan si, et seulement si, un vecteur directeur de cette droite est orthogonale à deux vecteurs non colinéraires du plan.
On calcule alors les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{AB}(-12;-15;0)$ et $\overrightarrow{AC}=(-12;0;20)$

On calcule alors les produits scalaires :

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}=-12\times 5+(-15)\times(-4)+0=0$
- $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DE}=-12\times(5)+0+20\times 3=0$

EXERCICE 3 (5 points)

Partie A

1) a) $\mathscr{A}_1=\displaystyle\int_0^a g(x)\,dx=\left[x-e^{-x}\right]_0^a=a-e^{-a}+1$

b) $\mathscr{A}_2=\displaystyle\int_a^1 g(x)\,dx=\left[x-e^{-x}\right]_a^1=1-e^{-1}-a+e^{-a}$

2) a) On a : $f'(x)=2+2e^{-x}>0$ car $\forall x\in[0,1],\ e^{-x}>0$. La fonction f est donc croissante sur [0,1]. On obtient le tableau de variation suivant :

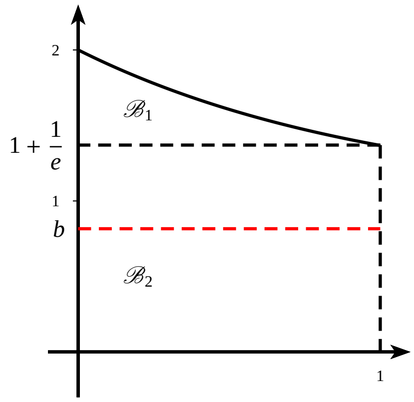
x	0		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-2+\dfrac{1}{e}$	$\nearrow$	$2-\dfrac{1}{e}$

b) La fonction f est continue (car dérivable) et monotone sur [0,1], de plus $f(0)\simeq -1,6<0$ et $f(1)\simeq 1,6>0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha\in[0,1]$ tel que $f(\alpha)=0$. On trouve : $\alpha\simeq 0,45$

3) On a $\mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2 = f(a)$. Les aires sont donc égales si $a = \alpha \simeq 0,45$

Partie B

1) Graphiquement, il est manisfeste que $\mathscr{B}_1 < \mathscr{B}_2$. b est donc inférieur à $f(1) = 1 + \dfrac{1}{e}$



2) On doit avoir : $\mathscr{B}_1 = \mathscr{B}_2$, on obtient alors :

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x - b = b \quad \Leftrightarrow \quad [x - e^{-x}]_0^1 - b = b \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{e} + 1 - b = b$$

On trouve alors : $b = 1 - \dfrac{1}{2e}$

Exercice 4 (5 points)

Partie A

1) Les deux lignes à compléter sont :
- "Affecter à u la valeur $\dfrac{nu+1}{2(n+1}$"
- "Affecter à n la valeur $n+1$"

2) Si on veut afficher tous les termes de la suite, il faut mettre les instructions "Afficher u" et "Afficher n" à l'intérieur du Tant que.

3) Au vu du tableau, on peut faire la conjecture que la suite (u_n) est décroissante et converge vers 0

Partie B

1) On calcule v_{n+1} en fonction de (v_n)

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= (n+1)u_{n+1} - 1 \\ &= \frac{(n+1)(nu_n+1)}{2(n+1)} - 1 \\ &= \frac{nu_n}{2} + \frac{1}{2} - 1 \\ &= \frac{1}{2}(nu_n - 1) = \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - 1 = \dfrac{1}{2}$

2) On a donc : $v_n = v_1 \times q^{n-1} = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = 0,5^n$

De la définition de (v_n), on tire l'expression de $u_n = \dfrac{v_n + 1}{n} = \dfrac{1 + 0,5^n}{n}$

3) On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^n = 0$ car $-1 < 0,5 < 1$

Par somme et quotient, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

4) On calcule la différence de deux termes consécutifs :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1 + 0,5^{n+1}}{n+1} - \frac{1 + 0,5^n}{n} \\ &= \frac{n + 0,5^{n+1}n - (n+1) - (n+1)0,5^n}{n(n+1)} \\ &= \frac{-1 + 0,5^n(0,5n - n - 1)}{n(n+1)} \\ &= -\frac{1 + 0,5^n(1 + 0,5n)}{n(n+1)} \end{aligned}$$

Cette quantité est manifestement négative car opposé de somme, produit et quotient de nombres positifs. La suite (u_n) est donc décroissante.

Partie C

Soit l'algorithme suivant :

> **Variables** : n entier naturel et u réel
> **Initialisation** : Affecter à n la valeur 1 et à u la valeur 1,5
> **Traitement** : Tant que $u \geqslant 0,001$
> Affecter à u la valeur $\dfrac{nu + 1}{2(n+1)}$
> Affecter à n la valeur $n + 1$
> Fin Tant que
> **Sortie** : Afficher n

En effectuant cet algorithme on trouve : $n = 1001$

EXERCICE 4 (5 points)

Spécialité

Partie A

1) A la fin du Tant que il faut ajouter :
- Affecter à i la valeur $i + 1$
- Afficher les valeurs de i, a et b

2) A vu des résultats, on peut faire la conjecture que la suite (a_n) est décroissante et converge vers 18 et la suite (b_n) est croissante et converge vers 12.

Partie B

1) D'après l'énoncé, on a les relations suivazntes :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 0,8a_n + 0,3b_n \\ b_{n+1} &= 0,2a_n + 0,7b_n \end{aligned}$$

Cela nous conduit à poser $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$

On a alors : $U_{n+1} = MU_n$

2) Soit la proposition $\mathcal{P}$: $\forall n > 1 \;\; M = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,5^n & 0,6 - 0.6 \times 0,5^n \\ 0,4 - 0,4 \times 0,5^n & 0,4 + 0,6 \times 0,5^n \end{pmatrix}$

- **Initialisation :** Pour $n = 1$, on a :

$$\begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,5^1 & 0,6 - 0.6 \times 0,5^1 \\ 0,4 - 0,4 \times 0,5^1 & 0,4 + 0,6 \times 0,5^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,2 & 0,6 - 0.3 \\ 0,4 - 0,2 & 0,4 + 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} = M^1$$

- **Hérédité :** On admet l'expression de M^n, calculons l'expression M^{n+1}.

$$M^{n+1} = M^n \times M = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,5^n & 0,6 - 0.6 \times 0,5^n \\ 0,4 - 0,4 \times 0,5^n & 0,4 + 0,6 \times 0,5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Si on s'intéresse au premier coefficient α_{n+1} on a :

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= 0,8(0,6 + 0,4 \times 0,5^n) + 0,2(0,6 - 0,6 \times 0,5^n) \\ &= 0,48 + 0,32 \times 0,5^n + 0,12 - 0,12 \times 0,5^n \\ &= 0,6 + 0,2 \times 0,5^n \\ &= 0,6 + 0,4 \times 0,5 \times 0,5^n \\ &= 0,6 + 0,4 \times 0,5^{n+1} \end{aligned}$$

La proposition est donc héréditaire

- Par initialisation et hérédité, la proposition $\mathcal{P}$ est vraie.

3) De la relation $U_{n+1} = MU_n$, de proche en proche, on déduit que :

$$U_n = M^n U_0 = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,5^n & 0,6 - 0.6 \times 0,5^n \\ 0,4 - 0,4 \times 0,5^n & 0,4 + 0,6 \times 0,5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

On en déduit alors :

$$a_n = 20(0,6 + 0,4 \times 0,5^n) + 10(0,6 - 0,6 \times 0,5^n) = 12 + 8 \times 0,5^n + 6 - 6 \times 0,5^n = 18 + 2 \times 0,5^n$$

4) On sait que : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^n = 0$ car $-1 < 0,5 < 1$
Par produit et somme on en déduit que : $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 18$. Au bout d'un grand nombre d'années le nombre d'oiseaux va se stabiliser vers 18 millions