Rappels sur les suites
Récurrence

Table des matières

1 Suite 2
- 1.1 Définition . . . 2
- 1.2 Exemples . . . 2
- 1.3 Variation ou monotonie d'une suite . . . 3
- 1.4 Comment montrer la monotonie d'une suite . . . 3
  - 1.4.1 Technique algébrique . . . 3
  - 1.4.2 À l'aide de la variation de la fonction associée . . . 4
- 1.5 Visualisation d'une suite . . . 4

2 Suite arithmétique (rappels) 5
- 2.1 Définition . . . 5
- 2.2 Comment la reconnaît-on ? . . . 5
- 2.3 Expression du terme général u_n en fonction de n et du premier terme 5
- 2.4 Somme des premiers termes . . . 6

3 Suite géométrique (rappels) 6
- 3.1 Définition . . . 6
- 3.2 Comment la reconnaît-on ? . . . 6
- 3.3 Expression du terme général u_n en fonction de n et du premier terme 6
- 3.4 Somme des premiers termes . . . 7
- 3.5 Limite d'une suite géométrique . . . 7

4 Le raisonnement par récurrence 7
- 4.1 Intérêt du raisonnement par récurrence . . . 7
- 4.2 Axiome de récurrence . . . 8
- 4.3 Exemple de rédaction . . . 9
- 4.4 Application aux suites . . . 10

1 Suite

1.1 Définition

Définition 1 : Un suite (u_n) est une fonction définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. C'est à dire qu'à un rang donné n, on associe un nombre réel u_n. Une suite ne commence pas nécessairement à 0, elle peut commencé à n_0.

$$(u_n) \quad : \quad \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longmapsto u_n \end{array}$$

u_n est appelé le terme général de la suite (u_n).

1.2 Exemples

On peut définir une suite de **façon explicite** : $u_n = f(n)$

$$u_n = \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}^*$$
$$v_n = \sqrt{n-3} \quad n \geqslant 3$$

On peut aussi définir une suite de **façon récurrente** à un ou plusieurs termes :

- À un terme : $u_{n+1} = f(u_n)$

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

- À deux termes : $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$:

$$\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

On peut encore définir une suite par l'intermédiaire d'une autre suite, par une somme de termes, etc...

$$v_n = u_n - 4$$
$$w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

1.3 Variation ou monotonie d'une suite

Définition 2 : Soit (u_n) une suite numérique. On dit que :

- la suite (u_n) est strictement **croissante** (à partir d'un certain rang n_0) lorsque
$$u_{n+1} > u_n \quad \text{pour tout entier} \quad n \geqslant n_0$$
- la suite (u_n) est strictement **décroissante** (à partir d'un certain rang n_0) lorsque
$$u_{n+1} < u_n \quad \text{pour tout entier} \quad n \geqslant n_0$$
- la suite (u_n) est **monotone** (à partir d'un certain rang n_0) si elle est croissante ou décroissante à partir d'un certain rang n_0
- la suite (u_n) est **stationnaire** s'il existe un n_0 tel que
$$u_{n+1} = u_n \quad \text{pour tout entier} \quad n \geqslant n_0$$
- la suite (u_n) est **constante** lorsque $u_{n+1} = u_n$ pour tout entier n du domaine de définition

Remarque :

Il existe des suites qui ne sont ni croissante ni décroissante : $u_n = (-1)^n$

Ce qui se passe pour les premiers terme de la suite n'entre pas en compte dans la variation d'une suite

1.4 Comment montrer la monotonie d'une suite

1.4.1 Technique algébrique

Règle 1 : Pour montrer la monotonie d'une suite, on étudie la signe de la quantité $u_{n+1} - u_n$
si la quantité est positive (resp négative) à partir d'un certain rang, la suite est croissante (resp décroissante

Si tous les termes de la suite sont positifs à partir d'un certain rang, on étudie la quantité $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$
si cette quantité est supérieure à 1 (resp inférieure à 1), la suite est croissante (resp décroissante).

Exemples :

- Montrer que la suite (u_n) définie pour tout n par : $u_n = n^2 - n$ est croissante.
Étudions le signe de la quantité : $u_{n+1} - u_n$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 - (n+1) - (n^2 - n) \\ &= n^2 + 2n + 1 - n - 1 - n^2 + n \\ &= 2n \end{aligned}$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $2n \geqslant 0$, donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. La suite (u_n) est croissante à partir du rang 0.

➪ Montrer que la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \dfrac{2^n}{n}$ est croissante.
Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $u_n > 0$, comparons le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{2^n}{n}} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n} = \frac{2n}{n+1}$$

Or $n \geqslant 1$, en ajoutant n de chaque côté de l'inégalité, $2n \geqslant n+1$, donc :

$$\frac{2n}{n+1} \geqslant 1$$

Comme $\forall n \geqslant 1$ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, la suite (u_n) est croissante à partir du rang 1.

1.4.2 À l'aide de la variation de la fonction associée

Théorème 1 : Soit (u_n) la suite définie par $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur un intervalle $[n_0\,;+\infty[$ où $n_0 \in \mathbb{N}$

Si la fonction f est croissante (resp décroissante) sur $[n_0\,;+\infty[$ alors la suite est croissante (resp décroissante) au partir du rang n_0.

Exemple : Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \geqslant 2$ par $u_n = \sqrt{n-2}$. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

On a $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \sqrt{x-2}$

Comme la fonction $x \mapsto x+2$ est croissante sur $[2\,;+\infty[$ et à valeur dans $[0\,;+\infty[$, intervalle sur lequel la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante, la fonction f est la composée de deux fonctions croissantes.

f est donc croissante sur $[2\,;+\infty[$ et donc la suite (u_n) est croissante à partir du rang 2

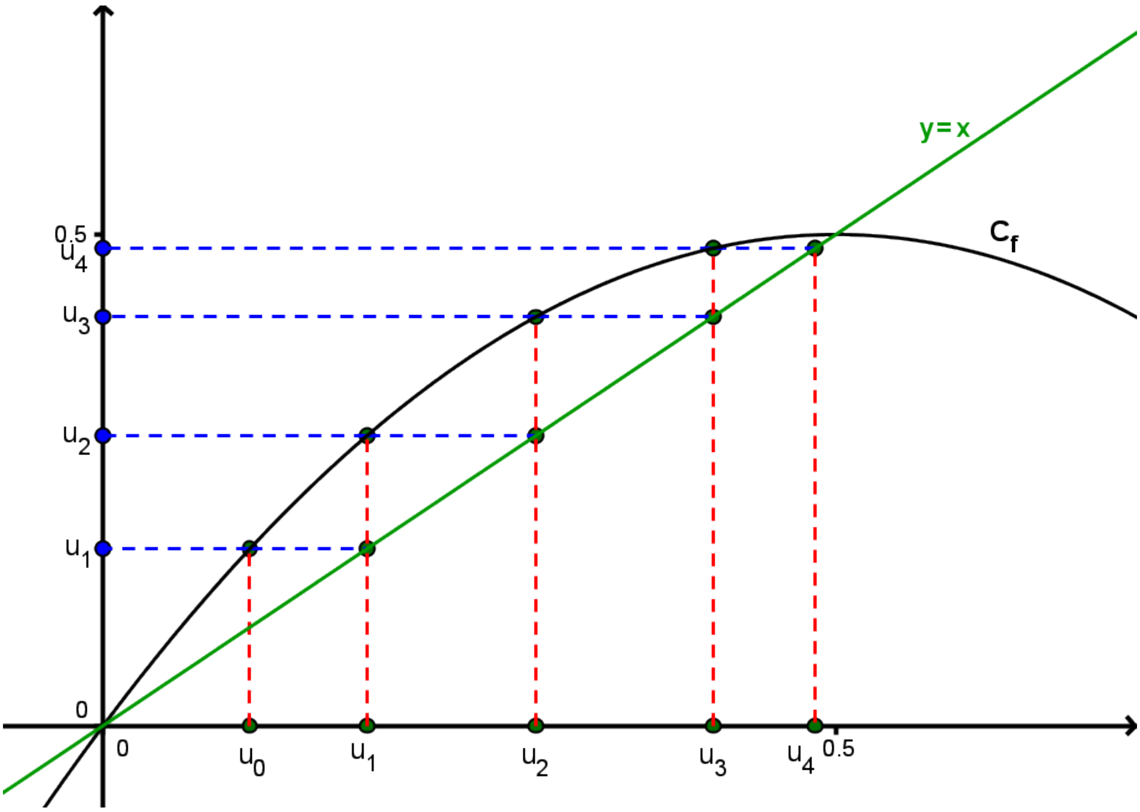
1.5 Visualisation d'une suite

Pour visualiser une suite définie par récurrence $u_n = f(u_n)$, il suffit de tracer la courbe de la fonction associée f et la droite $y = x$. La droite sert à reporter les termes de la suite sur l'axe des abscisses.

Exemple : Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,1 \\ u_{n+1} = 2u_n(1-u_n) \end{cases}$$

On obtient alors le graphe suivant :



2 Suite arithmétique (rappels)

2.1 Définition

Définition 3 : Une suite arithmétique (u_n) est définie par :

- un premier terme u_0 ou u_p
- une relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$ $\quad r$ étant la raison de la suite

Remarque : Une suite arithmétique correspond à une progression linéaire

2.2 Comment la reconnaît-on ?

Une suite est arithmétique si la différence entre deux termes consécutifs est constante. Cette constante est alors la raison.

$$\forall n \geqslant p \qquad u_{n+1} - u_n = \text{constante}$$

2.3 Expression du terme général u_n en fonction de n et du premier terme

Règle 2 : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r

- Si le premier terme est u_0, alors : $u_n = u_0 + nr$
- Si le premier terme est u_p, alors : $u_n = u_p + (n - p)r$

2.4 Somme des premiers termes

Théorème 2 : D'ne façon générale, la somme des premiers termes d'une suite arithmétique obéit à :

$$S_n = \text{Nbre de termes} \times \frac{\Sigma \text{ termes extrèmes}}{2}$$

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n \quad \text{alors} \qquad S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \quad \text{alors} \qquad S_n = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$

$$S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n \quad \text{alors} \qquad S_n = (n-p+1)\left(\frac{u_p + u_n}{2}\right)$$

3 Suite géométrique (rappels)

3.1 Définition

Définition 4 : Une suite géométrique (u_n) est définie par :
- ➪ un premier terme u_0 ou u_p
- ➪ une relation de récurrence : $u_{n+1} = q \times u_n$ $\quad q$ étant la raison de la suite

Remarque : Une suite géométrique correspond à une progression exponentielle.

3.2 Comment la reconnaît-on ?

Une suite est géométrique si le quotient entre deux termes consécutifs est constant. Cette constante est alors la raison.

$$\forall n \geqslant p \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \text{constante}$$

3.3 Expression du terme général u_n en fonction de n et du premier terme

Règle 3 : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q
- ➪ Si le premier terme est u_0, alors : $u_n = q^n \times u_0$
- ➪ Si le premier terme est u_p, alors : $u_n = q^{n-p} \times u_p$

3.4 Somme des premiers termes

Théorème 3 : D'une façon générale, la somme des premiers termes d'une suite géométrique ($q \neq 1$) obéit à :

$$S_n = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nbre termes}}}{1 - q}$$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \quad \text{alors} \qquad S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n \quad \text{alors} \qquad S_n = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

3.5 Limite d'une suite géométrique

Théorème 4 : Soit une suite (u_n) définie par : $u_n = q^n$ (avec $q \in \mathbb{R}$)

- ➪ Si $q > 1$ alors (u_n) est divergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- ➪ Si $q = 1$ alors (u_n) est constante (donc convergente vers 1)
- ➪ Si $-1 < q < 1$ alors (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- ➪ Si $q < -1$ alors (u_n) est divergente et n'a pas de limite

4 Le raisonnement par récurrence

4.1 Intérêt du raisonnement par récurrence

Considérons la suite (u_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

Cette suite est définie par récurrence (chaque terme dépend du précédent). On souhaiterait obtenir une formule permettant de calculer explicitement u_n en fonction de n. À première vue, cette formule ne saute pas aux yeux. Dans une telle situation, le calcul des premiers termes est souvent intéressant pour se faire une « idée ».

Ici, nous avons :

$$\begin{aligned} u_1 &= 2u_0 + 1 = 1 \\ u_2 &= 2u_1 + 1 = 3 \\ u_3 &= 2u_2 + 1 = 7 \\ u_4 &= 2u_3 + 1 = 15 \\ u_5 &= 2u_4 + 1 = 31 \end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer que la suite (u_n) semble obéir à une loi toute simple : en ajoutant 1 à chaque terme, on obtient les puissances successives de 2.

Nous pouvons donc émettre la conjecture suivante :

$$\text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n - 1$$

Attention, une conjecture n'est pas une preuve (ni une affirmation nécessairement vraie, certaines conjectures se révèlent parfois fausses...). Ce n'est que l'énoncé d'une propriété résultant d'un certain nombre d'observations.

Alors comment confirmer, par une démonstration, la propriété conjecturée ci-dessus ?

Notons $\mathcal{P}$ la propriété, définie pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\mathcal{P}(n) \ : \ u_n = 2^n - 1$$

Supposons un instant, que pour un certain entier n, on ait effectivement la propriété $\mathcal{P}(n)$ $u_n = 2^n - 1$

Alors, on aurait :

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$$

Ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$.

Autrement dit, si la propriété est vraie à un certain rang n alors elle l'est également au rang suivant.

On dit que la propriété $\mathcal{P}$ est héréditaire.

On a vérifié que la propriété $\mathcal{P}$ était vraie au rang $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ (on dit que la propriété $\mathcal{P}$ est initialisée). Mais comme elle est héréditaire, elle sera vraie encore au rang $n = 6$, puis au rang $n = 7$ etc... Si bien que notre propriété est finalement vraie à tout rang.

4.2 Axiome de récurrence

<u>Définition 5</u> : Soit une propriété $\mathcal{P}$ définie sur $\mathbb{N}$

Si :

- La propriété est **initialisé** à partir d'un certain rang n_0
- La propriété est **héréditaire** à partir d'un certain rang n_0 (c'est à dire que pour tout $n \geqslant n_0$ alors $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$

Alors :

La propriété est vraie à partir du rang n_0

Le raisonnement par récurrence s'apparente à la théorie des dominos :

On considère une suite de dominos.

Si un domino tombe alors le suivant tombera.

Comme le premier tombe alors le second tombera, puis le troisième, ... etc...

Conclusion : si le premier domino tombe alors tous tomberont.

Tout repose en fait sur le principe de propagation « **si l'un tombe alors le suivant aussi** ».

C'est une sorte de réaction en chaîne. Une seule étincelle, un seul domino qui tombe et tous seront par terre !

Le raisonnement par récurrence comporte deux phases :

➪ prouver que le premier domino tombe.

➪ établir le principe : si le n^e domino tombe alors le suivant (le numéro $n+1$) tombera.

Si on démontre ces deux choses alors la réaction se déclenche. Donc la propriété est démontrée pour tous les dominos !

Sauf qu'ici, un domino numéro n qui tombe est une propriété ou une formule vraie au rang n.

4.3 Exemple de rédaction

Démontrer l'inégalité de Bernouilli :

$$\forall x \in [0;+\infty], \quad (1+x)^n \geqslant 1+nx$$

➪ On a $\mathcal{P}(0)$ puisque $(1+x)^0 \geqslant 1+0x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

➪ Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$:

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx$$

Or, $1+x > 0$, donc en multipliant l'inégalité ci-dessus par $(1+x)$, on obtient :

$$(1+x)^{n+1} \geqslant (1+nx)(1+x)$$

Or

$$(1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2$$

et comme $\quad nx^2 \geqslant 0$

$$(1+nx)(1+x) \geqslant 1+(n+1)x$$

D'où

$$(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x$$

ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : on a :

$$\begin{cases} \mathcal{P}(0) \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \end{cases}$$

Donc : $\forall x \in [0;+\infty], \quad (1+x)^n \geqslant 1+nx$

4.4 Application aux suites

La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$$

a) Démontrer que pour tout naturel n, $0 < u_n < 2$

b) Prouver que la suite est strictement croissante.

✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏

a) Montrons l'encadrement de u_n par récurrence.
Montrons la propriété $\mathcal{P}(n)$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_n < 2$$

Initialisation : on a $u_0 = 1$ donc $0 < u_0 < 2$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose que $0 < u_n < 2$, montrons que $0 < u_{n+1} < 2$.

Soit la fonction associée à la suite : $f(x) = \sqrt{x+2}$. Cette fonction est la composée de deux fonctions croissantes, donc la fonction f est croissante.

$$0 < u_n < 2$$

comme la fonction f est croissante, on a :

$$f(0) < f(u_n) < f(2)$$

donc

$$\sqrt{2} < u_{n+1} < 2$$

et donc

$$0 < u_{n+1} < 2$$

La proposition $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

Conclusion : par initialisation et l'hérédité, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n.

b) Montrons par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

Initialisation : on a $u_1 = \sqrt{3}$ donc $u_1 > u_0$. La proposition est initialisée.

Hérédité : supposons que $u_{n+1} > u_n$, montrons alors que $u_{n+2} > u_{n+1}$.

$$\text{On a :} \quad u_{n+1} > u_n$$

comme la fonction associée est croissante sur $]0;2[$, on a :

$$f(u_{n+1}) > f(u_n)$$
$$u_{n+2} > u_{n+1}$$

La proposition est donc héréditaire.

Par initialisation et hérédité, la suite (u_n) est croissante.