Fiche technique sur les limites

1 Fonctions élémentaires

1.1 Limite en $+\infty$ et $-\infty$

$f(x)$	x^n	$\dfrac{1}{x^n}$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$\ln x$	e^x
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	n pair $+\infty$ n impair $-\infty$	0	non défini	non défini	non défini	0

1.2 Limite en 0

$f(x)$	$\dfrac{1}{x^n}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$\ln x$
$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)$	n pair $+\infty$ n impair $-\infty$	non défini	non défini

2 Asymptotes

2.1 Asymptotes parallèles aux axes

Résultat sur f	Interprétation géometrique sur la courbe $\mathscr{C}_f$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$	La droite $y = l$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$	La droite $x = a$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$

2.2 Asymptote oblique

Théorème 1 *Soit f un fonction telle que : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$,*
$\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de f, peut admettre une asymptote oblique.

La droite Δ d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en ∞ si et seulement si :

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

Le signe du 0 permet alors de connaître la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ

3 Opération sur les limites et formes indéterminées

3.1 Somme de fonctions

Si f a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f+g$ a pour limite	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F. Ind.

3.2 Produit de fonctions

Si f a pour limite	l	$l \neq 0$	0	∞
Si g a pour limite	l'	∞	∞	∞
Alors $f \times g$ a pour limite	$l \times l'$	∞*	F. ind.	∞*

*Appliquer la règle des signes

3.3 Quotient de fonctions

Si f a pour limite	l	$l \neq 0$	0	l	∞	∞
Si g a pour limite	$l' \neq 0$	0	0	∞	l	∞
Alors $\dfrac{f}{g}$ a pour limite	$\dfrac{l}{l'}$	∞*	F. ind.	0	∞*	F. ind.

*Appliquer la règle des signes

4 Polynômes et les fonctions rationnelles

4.1 Fonction polynôme

Théorème 2 *Un polynôme a même limite en $+\infty$ et $-\infty$ que son monôme du plus haut degré.*

$$\text{Si} \quad P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 x_0 \quad \text{alors}$$

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} P(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n$$

4.2 Fonction rationnelle

Théorème 3 *Une fonction rationnelle a même limite en $+\infty$ et $-\infty$ que son monôme du plus degré de son numérateur sur celui de son dénominateur.*

$$\text{Si} \quad f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 x_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 x_0} \quad \text{alors}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

5 Fonction composée

Théorème 4 *Soient f, g et h trois fonctions telles que : $h = g \circ f$.*
Chacunes des lettres a, b et c désigne soit un réel, soit $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{x \to b} g(x) = c \end{array}\right\} \quad \textit{alors} \quad \lim\limits_{x \to a} h(x) = c$$

6 Fonctions exponentielle et logarithme

6.1 Fonction exponentielle

Théorème 5 *Deux séries de limites :*

- *Comparaison de la fonction exponentielle avec la fonction puissance en $+\infty$ et en $-\infty$.*

$$\textit{En } +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\textit{En } -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

- *Une autre limite importante :*

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

6.2 Fonction logarithme

Théorème 6 *Deux séries de limites :*

- *Comparaison de la fonction logarithme avec la fonction puissance en $+\infty$ et en 0.*

$$\textit{En } +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$\textit{En } 0 \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0 \quad ; \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = 0$$

- *Une autre limite importante :*

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$$