Correction contrôle de mathématiques
du mardi 22 novembre 2011

Exercice 1

Equation différentielle (6 points)

Partie A : ROC

1) $f_0(x) = -\dfrac{b}{a}$, on a :

$$f_0'(x) = 0 \quad \text{et} \quad a f_0(x) + b = -b + b = 0$$

La fonction f_0 est donc solution de l'équation (E).

2) Soit la solution générale f, comme f et f_0 vérifie (E), on a le système suivant :

$$\begin{cases} f' = af + b \\ f_0' = af_0 + b \end{cases}$$

Par soustraction des deux égalités, on obtient :

$$f' - f_0' = af - af_0$$
$$(f - f_0)' = a(f - f_0)$$

La fonction $f - f_0$ vérifie donc l'équation $y' = ay$

3) On a alors, par application de l'équation $y' = ay$

$$(f - f_0)(x) = g(x) = Ke^{ax}$$

On obtient alors la solution générale f de l'équation (2) :

$$f(x) = Ke^{ax} + f_0 = ke^{ax} - \frac{b}{a}$$

Partie B

1) L'équation différentielle revient à :

$$v'(t) = -\frac{1}{10}v(t) + 3$$

On obtient alors les solutions suivantes :

$$v(t) = Ke^{-\frac{t}{10}} + \frac{-3}{-\frac{1}{10}} = Ke^{-\frac{t}{10}} + 30$$

Comme $v(0) = 0$, on a alors : $K + 30 = 0$, soit $K = -30$
On obtient alors la solution :

$$v(t) = -30e^{-\frac{t}{10}} + 30 = 30\left(1 - e^{-\frac{t}{10}}\right)$$

2) a) On dérive, on obtient :

$$v'(t) = 30\left(-\left(-\frac{1}{10}\right)e^{-\frac{t}{10}}\right) = 3e^{-\frac{t}{10}}$$

Donc sur $[0; +\infty[$, $v'(t) > 0$, la vitesse est donc toujours croissante.

b) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to+\infty} -\dfrac{t}{10} = -\infty \\ \lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0\end{array}\right\}$ Par composition $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{t}{10}} = 0$

Par somme et produit, on a donc : $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 30$

3) On veut que $v'(t) < 0,1$, c'est à dire $3e^{-\frac{t}{10}} < 0,1$

On rentre la fonction $t \mapsto 3e^{-\frac{t}{10}}$ dans la calculette, on trouve alors : $t \simeq 34$
A partir de 34 s la vitesse du cycliste est donc stabilisé.

Exercice 2

Limites, dérivées, équation et inéquation (6 points)

1) Déterminer les limites suivantes :

a) $\dfrac{e^x - 1}{x} = \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{1}{x}$, on a : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = 0\end{array}\right\}$ Par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

b) $(1+x)e^x = e^x + xe^x$, on a : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0\end{array}\right\}$ Par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} (1+x)e^x = 0$

c) $e^{2x} - e^x + 2 = e^{2x}\left(1 - \dfrac{1}{e^x} + \dfrac{2}{e^{2x}}\right)$, on a :

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^{2x}} = 0$

Par somme et produit, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} - e^x + 2 = +\infty$

d) On fait un changement de variable : $X = 2x$, si $x \to 0$ alors $X \to 0$. on a :

$$\frac{e^{2x}-1}{x} = 2 \times \frac{e^X - 1}{X} \qquad \text{et} \qquad \lim_{X\to 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$$

Par produit, on a : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x} = 2$

2) Déterminer la fonction dérivées des fonctions suivantes :

$$f'(x) = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x)e^x = (x^2 - 2)e^x$$

$$g'(x) = e^{\frac{1}{x}} + x\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{x-1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$$

$$h'(x) = \frac{3e^x(e^{2x}+1) - 6e^x e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{3e^x(1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2}$$

3) Résoudre l'équation et l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$:

Pour l'équation (E), on pose : $X = e^x$, avec $X > 0$, l'équation devient alors :

$X^2 + X - 2 = 0$ on a alors :$X_1 = 1$ (racine évidente) et $X = -2 < 0$ (non retenue).

On revient alors à x :

$$X = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{donc} \quad S = \{0\}$$

Pour l'inéquation (I), on peut faire un produit en croix car $e^x + 1 > 0$, on obtient alors :

$$e^x + 3 > 2e^x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad -e^x > -1 \quad \Leftrightarrow \quad e^x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x < 0$$

On a alors : $S =]-\infty, 0[$

Exercice 3

Etude d'une fonction (8 points)

1) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{array}\right\}$ Par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

Par somme et quotient : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. L'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe (C) en $-\infty$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{array}\right\}$ Par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

Par somme et quotient : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$. La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe (C) en $+\infty$

2) $f'(x) = -\dfrac{-e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0$ alors $f'(x) > 0$. La fonction est f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3) On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$-\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	1

4) L'équation de la tangente en a est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, pour $a = 0$, on a :

$$y = f'(0)x + f(0) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

5) a) On a :

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= f'(x) - \frac{1}{4}\\ &= \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} - \frac{1}{4}\\ &= \frac{4e^{-x} - 1 - 2e^{-x} - e^{-2x}}{4(1+e^{-x})^2}\\ &= \frac{-1 + 2e^{-x} - (e^{-x})^2}{4(1+e^{-x})^2}\\ &= -\frac{(1-e^{-x})^2}{(1+e^{-x})^2}\end{aligned}$$

b) Si $x \neq 0$, on a : $-\dfrac{(1-e^{-x})^2}{(1+e^{-x})^2} < 0$ la fonction φ est donc strictement décroissante.

Comme $\varphi(0) = 0$, on en déduit :

- Si $x < 0$, la courbe C est au dessus de la tangente (T).
- Si $x > 0$, la courbe C est en dessous de la tangente (T).

Le point A est donc un point d'inflexion.

6) Voir à la fin.

7) a) Il faut faire une translation de vecteur $-\dfrac{1}{2}\vec{\jmath}$ de la courbe (C) pour obtenir la courbe (C_g).

b) On réduit la forme de $g(x)$:

$$g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} - \frac{1}{2} = \frac{1-e^{-x}}{2(1+e^{-x})}$$

Montrons que la fonction g est impaire. Pour tout x réel, on a :

$$g(-x) = \frac{1-e^{x}}{2(1+e^{x})} = \frac{e^{x}(e^{-x}-1)}{2e^{x}(e^{-x}+1)} = \frac{e^{-x}-1}{2(e^{-x}+1)} = -g(x)$$

La fonction g est impaire et donc la courbe C_g est symétrique par rapport à l'origine.

c) Par une translation de vecteur $\dfrac{1}{2}\vec{\jmath}$ de la courbe C_g, on retrouve la courbe C. Le point O se transforme alors en A. La courbe C est donc symétrique par rapport au point A.

8) La fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ($f' > 0$). De plus $f(\mathbb{R}) =]0;1[$ et $\frac{3}{4} \in]0,1[$, donc :
d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = \frac{3}{4}$

On trouve à l'aide de la calculette, l'encadrement suivant : $1,098 < \alpha < 1,099$

9) Question bonus :
L'équation de la tangente en a, a pour équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) \quad \Leftrightarrow \quad y = f'(a)x - af'(a) + f(a)$$

Pour que cette tangente passe par l'origine, il faut donc que : $-af'(a) + f(a) = 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} -\frac{ae^{-a}}{(1+e^{-a})^2} + \frac{1}{1+e^{-a}} &= 0 \\ \frac{-ae^{-a} + 1 + e^{-a}}{(1+e^{-a})^2} &= 0 \\ -ae^{-a} + 1 + e^{-a} &= 0 \\ -a + e^{a} + 1 &= 0 \end{aligned}$$

or on sait que : $\forall a \in \mathbb{R} \quad e^a > a$ donc :

$$e^a > a - 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^a - a + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

L'équation n'a donc pas de solution. Il n'existe donc pas de tangente à la courbe C qui passe par l'origine.