La fonction logarithme

Table des matières

1 La fonction logarithme népérien **2**
1.1 Fonction réciproque d'une fonction monotone 2
1.2 Définition 3
1.3 Représentation de la fonction logarithme 4
1.4 Variation de la fonction logarithme 4

2 Propriétés de la fonction logarithme **5**
2.1 Le logarithme du produit 5
2.2 Conséquences 6

3 Étude de la fonction logarithme **7**
3.1 Dérivée 7
3.2 Limite en 0 et en l'infini 8
3.3 Tableau de variation et courbe 8
3.4 Croissance comparée 9
3.5 Une dernière limite 10
3.6 Dérivée du logarithme d'une fonction u 10

4 Applications **11**
4.1 Étude d'une suite 11
4.2 Étude d'une fonction 11

5 Le logarithme décimal **14**
5.1 Définition 14
5.2 Application sur le logarithme décimal 15
5.3 Quelques utilisations de la fonction log 16

Avant propos

La création de la fonction logarithme népérien est, à l'origine, antérieure à la fonction exponentielle bien que dans notre progression elle suit l'étude de la fonction exponentielle. La fonction logarithme a été crée par un drapier écossais du XVII^{e} siècle. Ce drapier, Néper, cherche une fonction pour simplifier les longs calculs des astronomes, des navigateurs et des financiers. Il crée alors une fonction qui transforme le produit en somme. C'est à dire que $f(ab) = f(a) + f(b)$. Il a ensuite passé trente ans de sa vie à créer une table dite « de logarithmes » qui permettait d'effectuer les conversions nécessaires. C'est cette fonction, qui fait écho à la fonction exponentielle, qui est l'objet de ce chapitre.

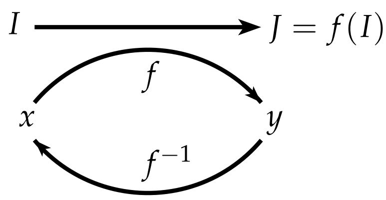
1 La fonction logarithme népérien

1.1 Fonction réciproque d'une fonction monotone

Théorème 1 : Une fonction f monotone de I dans $f(I) = J$ admet une fonction réciproque, notée f^{-1}, monotone de J dans I telle que :

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)$$

Démonstration : Ce théorème découle directement du théorème des valeurs intermédiaires. On peut alors schématiser les fonctions f et f^{-1} par :



Exemples :

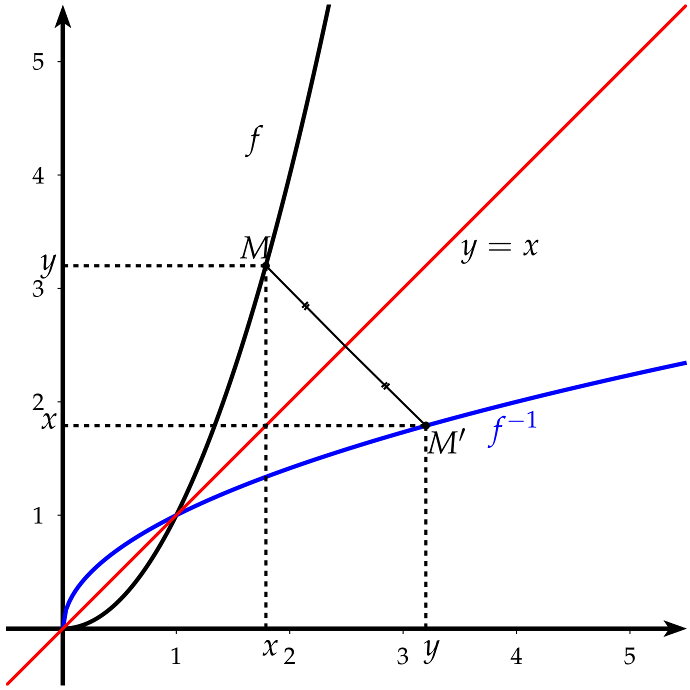
- La fonction carrée est monotone de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.
  Elle admet donc une fonction réciproque de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ qui est la fonction racine carrée.
- La fonction sinus est monotone de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1;1]$.
  Elle admet donc une fonction réciproque de $[-1;1]$ dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ qui est la fonction arcsin ou $\sin^{-1}$.

Conséquence

- On peut alors écrire les deux égalités suivantes :

$$\forall x \in I \quad f^{-1} \circ f(x) = x$$
$$\forall x \in J \quad f \circ f^{-1}(x) = x$$

➪ La représentation graphique de la fonction f^{-1} est symétrique, par rapport à la première bissectrice, à la représentation de la fonction f. Par exemple la fonction carrée (f) et sa réciproque racine carrée f^{-1}.



Théorème 2 : Hors programme.
Si la fonction f est monotone et dérivable de I dans $J = f(I)$ et si $f' \neq 0$ alors sa fonction réciproque f^{-1} est dérivable de J dans I et possède le même sens de variation que f.

Démonstration : Cela découle directement de la dérivabilité des fonctions composées.

1.2 Définition

Définition 1 : On appelle la fonction logarithme népérien notée ln, la fonction réciproque définie de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ de la fonction exponentielle.

Démonstration : Cela découle directement du théorème 1. La fonction exponentielle est une fonction monotone de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc elle admet une fonction réciproque de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

Conséquence On a les relations suivantes :

$$\begin{array}{ll} \forall x \in \mathbb{R} & \ln e^x = x \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* & e^{\ln x} = x \end{array}$$

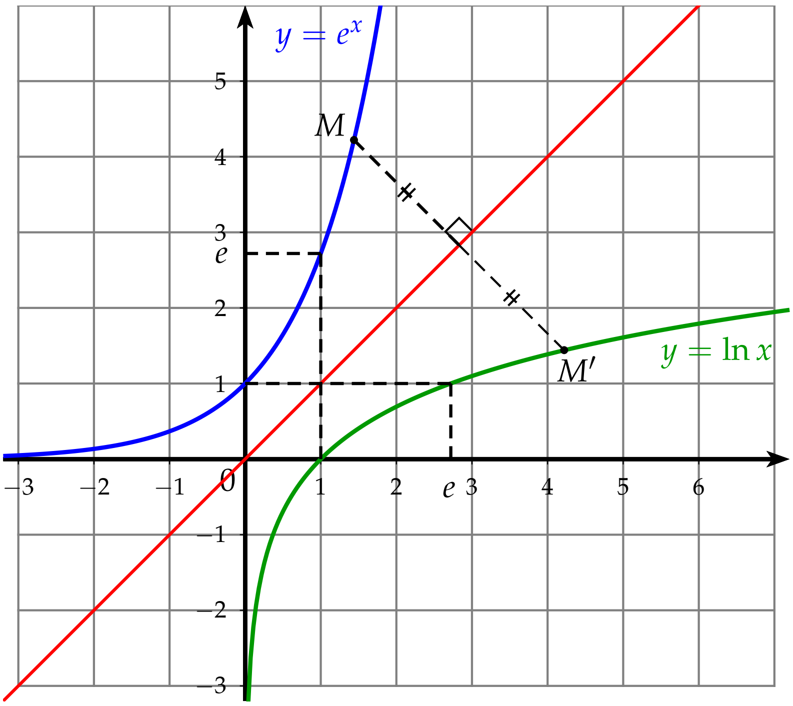
Théorème 3 : Pour tout réel strictement positif, on a :

$$y = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$$

on en déduit : $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$

1.3 Représentation de la fonction logarithme

Théorème 4 : Comme la fonction logarithme est la réciproque de la fonction exponentielle, sa représentation est la symétrique de la fonction exponentielle par rapport à la première bissectrice du repère.



1.4 Variation de la fonction logarithme

Théorème 5 : La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Conséquence Soit a et b deux réels strictement positifs

- $\ln a = \ln b \quad \Leftrightarrow \quad a = b$
- $\ln a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1$
- $\ln a < \ln b \quad \Leftrightarrow \quad a < b$
- $\ln a < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < a < 1$
- $\ln a > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a > 1$

Démonstration : Soit deux réels a et b strictement positifs et $a < b$ alors on peut écrire :

$$a < b$$
$$e^{\ln a} < e^{\ln b}$$

comme la fonction exponentielle est strictement croissante, on a :

$$\ln a < \ln b$$

La fonction logarithme est donc strictement croissante.

Exemples : Ces propriétés permettent de résoudre des équations et des inéquations. On veillera à mettre l'équation ou l'inéquation sous la forme ci-dessus et à déterminer les conditions de validité de l'équation ou de l'inéquation.

➪ Résoudre $\ln(2-2x) = 1$.

On met l'équation sous la forme : $\ln(2-2x) = \ln e$

l'équation est valide si, et seulement si, $2-2x > 0$ c'est à dire $x < 1$

On a alors : $x < 1$ et $2-2x = e$ soit $x = \dfrac{2-e}{2}$

On vérifie que $\dfrac{2-e}{2} < 1$ car $\dfrac{2-e}{2} \simeq -0,36$.

On conclut alors : $S = \left\{\dfrac{2-e}{2}\right\}$

➪ Résoudre $\ln(2x+1) < -1$

On met l'inéquation sous la forme : $\ln(2x+1) < \ln e^{-1}$

L'inéquation est valide si, et seulement si, $2x+1 > 0$ soit $x > -\dfrac{1}{2}$

On a alors : $x > -\dfrac{1}{2}$ et $2x+1 < e^{-1}$ soit $x < \dfrac{e^{-1}-1}{2}$

On a : $\dfrac{e^{-1}-1}{2} = \dfrac{1-e}{2e} \simeq -0.32$ donc $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1-e}{2e}$

On conclut par : $S = \left]-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1-e}{2e}\right[$

2 Propriétés de la fonction logarithme

2.1 Le logarithme du produit

Théorème 6 : Pour tous réels strictement positifs a et b, on a :

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

Démonstration : D'après les propriétés de l'exponentielle, on a :

$$e^a = e^b \quad \Leftrightarrow \quad a = b$$

Or $e^{\ln ab} = ab$ et $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = ab$

On conclut donc que $\ln ab = \ln a + \ln b$.

Remarque : C'est cette propriété qui est à l'origine de la fonction logarithme.

Exemple : $\ln 2 + \ln 3 = \ln 6$

2.2 Conséquences

Théorème 7 : Pour tous réels strictement positifs a et b, on a :

1) $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$

2) $\ln \dfrac{1}{b} = -\ln b$

3) $\ln a^n = n \ln a \quad$ avec $\quad n \in \mathbb{N}$

4) $\ln \sqrt{a} = \dfrac{1}{2} \ln a$

Démonstration : Pour démontrer la propriété 1, on revient aux propriétés de l'exponentielle.

On a $e^{\ln \frac{a}{b}} = \dfrac{a}{b}$ et $e^{\ln a - \ln b} = \dfrac{e^{\ln a}}{e^{\ln b}} = \dfrac{a}{b}$

d'où la propriété : $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Pour la deuxième propriété, on fait $a = 1$

La troisième propriété se démontre par récurrence à l'aide du produit.

Pour la dernière propriété : on a $a = \sqrt{a} \times \sqrt{a}$ donc d'après la propriété du produit, on a :

$\ln a = \ln \sqrt{a} + \ln \sqrt{a} = 2 \ln \sqrt{a}$ d'où $\ln \sqrt{a} = \dfrac{a}{b}$

Exemples : Voici 4 exemples d'utilisation de ces propriétés.

➪ Exprimer $\ln 50$ avec $\ln 2$ et $\ln 5$ et $\ln \sqrt{12}$ avec $\ln 2$ et $\ln 3$

On a $50 = 2 \times 5^2$ donc $\ln 50 = \ln 2 + 2 \ln 5$

On a $12 = 2^2 \times 3$ donc $\ln \sqrt{12} = \dfrac{1}{2}(2 \ln 2 + \ln 3) = \ln 2 + \dfrac{1}{2} \ln 3$

➪ Déterminer l'entier n tel que $2^n > 10\,000$

On a donc : $\ln 2^n > \ln 10^4$ soit $n \ln 2 > 4 \ln 10$

On obtient alors : $n > \dfrac{4 \ln 10}{\ln 2}$ or $\dfrac{4 \ln 10}{\ln 2} \simeq 13.29$ donc $n \geqslant 14$

➪ Résoudre l'équation : $\ln \sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \dfrac{1}{2} \ln x$

l'équation existe si $\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 6 - x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{3}{2} \\ x < 6 \\ x > 0 \end{cases}$

On en déduit l'ensemble de définition : $D_f = \left] \dfrac{3}{2} \,;\, 6 \right[$

On a alors $\dfrac{1}{2}[\ln(2x-3) + \ln x] = \ln(6-x)$

soit $\ln x(2x-3) = 2\ln(6-x)$

L'équation revient à :

$$\begin{aligned} x \in D_f \quad \text{et} \quad x(2x-3) &= (6-x)^2 \\ 2x^2 - 3x &= x^2 - 12x + 36 \\ x^2 + 9x - 36 &= 0 \end{aligned}$$

On calcule : $\Delta = 81 + 144 = 225 = 15^2$ on trouve alors deux solutions

$$x' = \frac{-9+15}{2} = 3\,, \quad 3 \in D_f \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-9-15}{2} = -12\,, \quad -12 \notin D_f$$

on conclut par : $S = \{3\}$

➪ Résoudre $\ln(5-x) - \ln 3 + \ln(x-1) \geqslant 0$

l'inéquation a un sens si , $\begin{cases} 5-x > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x > 1 \end{cases}$

On en déduit l'ensemble de définition : $D_f =]1;5[$

L'inéquation revient à :

$$\begin{aligned} x \in D_f \quad \text{et} \quad \ln(5-x) + \ln(x-1) &\geqslant \ln 3 \\ \ln(5-x)(x-1) &\geqslant \ln 3 \\ (5-x)(x-1) &\geqslant 3 \\ 5x - 5 - x^2 + x &\geqslant 3 \\ -x^2 + 6x - 8 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

On calcule : $\Delta = 36 - 32 = 4 = 2^2$ on trouve alors les racines suivantes :

$$x' = \frac{-6+2}{-2} = 2\,, \quad 2 \in D_f \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-6-2}{-2} = 4\,, \quad 4 \in D_f$$

Comme le coefficient de x^2 est négatif et que l'on veut que la quantité soit positive, on prend à l'intérieur des racines, intervalle qui est inclus dans l'ensemble de définition.

On conclut par : $S = [2;4]$

3 Étude de la fonction logarithme

3.1 Dérivée

Théorème 8 : La fonction logarithme est dérivable sur son ensemble de définition et :

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Démonstration : On revient à la définition de la dérivée, c'est à dire on cherche les $a \in \mathbb{R}_+^*$ pour lesquels la limite suivante est finie :

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}$$

Pour déterminer cette limite, on fait un changement de variable. On pose alors $X = \ln x$ et $A = \ln a$. On a alors $x = e^X$ et $a = e^A$ et si $x \to a$ alors $X \to \ln a$. La limite devient alors :

$$\lim_{X \to \ln a} \frac{X - A}{e^X - e^A}$$

Or la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la dérivée en $\ln a$ est $e^{\ln a}$:

$$\lim_{X \to \ln a} \frac{e^X - e^A}{X - A} = e^{\ln a} = a$$

Cette limite est strictement positive pour $a \in \mathbb{R}_+^*$. On en déduit que la limite suivante existe pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et :

$$\lim_{X \to \ln a} \frac{X - A}{e^X - e^A} = \frac{1}{a}$$

Conclusion : la fonction logarithme est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

3.2 Limite en 0 et en l'infini

Théorème 9 : On a les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

Démonstration : Pour montrer la limite en $+\infty$, on revient à la définition :

Soit un réel $A > 0$, il existe alors un réel M tel que $A = e^M$. On a $x > A$ alors $\ln x > M$.

Pour tout réel positif M, il existe $A = e^M$ tel que si $x > A$ alors $\ln x > M$.

Conclusion : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

Pour la deuxième limite, on fait un changement de variable. On pose $X = \dfrac{1}{x}$. Donc si $x \to 0^+$ alors $X \to +\infty$. On a alors :

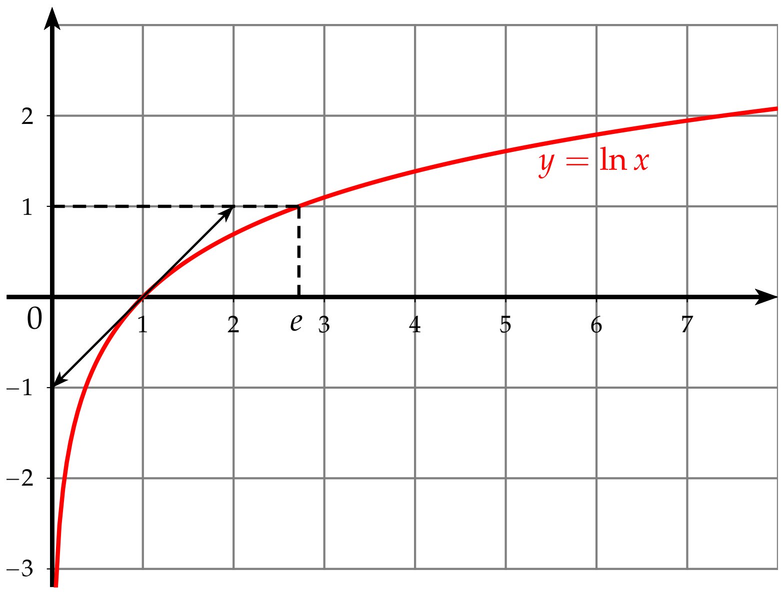
$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = \lim_{X \to +\infty} \ln \frac{1}{x} = \lim_{X \to +\infty} -\ln x = -\infty$$

3.3 Tableau de variation et courbe

On peut résumer les variations et les limites de la fonction ln, dans un tableau de variation :

x	0		1		e		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	$\Vert$			$+$			
$\ln$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

On a alors la courbe représentative suivante :



3.4 Croissance comparée

Théorème 10 : On a les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$

Démonstration : Pour la premère limite, on fait un changement de variable. On pose : $X = \ln x$, on a alors $x = e^X$. On a alors :

$$x \to +\infty \quad \text{alors} \quad X \to +\infty$$

Notre limite devient alors :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Pour la deuxième limite, on fait le changement de variable suivant : $X = \dfrac{1}{x}$. On a alors :

$$x \to 0^+ \quad \text{alors} \quad X \to +\infty$$

La deuxième limite devient alors :

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{X} \ln \frac{1}{X} = \lim_{X \to +\infty} -\frac{\ln X}{X} = 0 \quad \text{d'après notre première limite}$$

Remarque : Suite à ces limites, on peut dire que : « x l'emporte sur $\ln x$ en $+\infty$ ». On peut généraliser ces limites, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$$

Exemple : Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \ln x$

C'est une limite indéterminée, car de la forme « $+\infty - \infty$ ». On met alors x en facteur.

$$x - \ln x = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$$

On a alors :

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \\ &\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ &\lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{\ln x}{x} = 1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Par produit, on a :} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x - \ln x = +\infty \end{array}$$

3.5 Une dernière limite

Théorème 11 : On a la limite suivante :

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

Démonstration : Cela découle de la dérivée de ln en $x = 1$, en effet, on a :

$$\left.\begin{aligned} &(\ln)'(1) = \frac{1}{1} = 1 \\ &(\ln)'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} \\ &(\ln)'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1 + h) - \ln 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1 + h)}{h} \end{aligned}\right\} \quad \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1} = 1 \\ \\ \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1 + h)}{h} = 1 \end{array}$$

3.6 Dérivée du logarithme d'une fonction u

Théorème 12 : Soit une fonction u dérivable et strictement positive sur D. La fonction $\ln u$ est alors dérivable sur D et :

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Démonstration : La démonstration est la conséquence directe de la dérivée de la composition de fonction.

Exemple : Déterminer la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln(1 + x^2)$$

On pose la fonction $u(x) = 1 + x^2$. u est manifestement strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

4 Applications

4.1 Étude d'une suite

On pose, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n). On pourra poser $v_n = \ln u_n$.

Calculons v_n :

$$v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

La fonction associée à la suite (v_n) est : $f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

Sous cette forme, la limite de f en $+\infty$ est une forme indéterminée. On effectue un changement de variable pour lever l'indétermination : $X = \frac{1}{x}$, on a ainsi :

$$\text{si} \quad x \to +\infty \quad \text{alors} \quad X \to 0^+$$

On peut ainsi calculer la limite :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{X \to 0^+} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 1$$

On en déduit alors que : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$

On revient alors à la suite (u_n) : $v_n = \ln u_n$ donc $u_n = e^{v_n}$, on en déduit que (u_n) est convergente et :

$$\lim_{x \to +\infty} u_n = e$$

4.2 Étude d'une fonction

f est la fonction définie sur $I =]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$$

$\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1) a) Pourquoi la droite d d'équation $y = x$ est-elle asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$?

b) On note h la fonction définie sur I par $h(x) = x + \ln x$.
Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ a sur I une solution unique α telle que : $0,5 < \alpha < 0,6$.

c) En déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et d.

2) a) Démontrer que pour tout réel x de I, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$ où g est une fonction définie sur I que l'on précisera.

b) Démontrer que pour tout x de I, on a $g(x) \geqslant 1$.

c) En déduire les variations de f et tracer $\mathscr{C}_f$.

$\Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow$

1) a) On calcule la quantité $f(x) - x = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x^2}$. On passe ensuite à la limite en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Par addition, on a} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = 0\end{array}$$

On a donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = 0$,
donc la droite d est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$

b) h est la somme de deux fonctions continues et strictement croissantes, $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln x$, sur I. h est donc continue et strictement croissante sur I.

De plus $h(0,5) \approx -0,19$ et $h(0,6) \approx 0,09$ donc $h(0,5)h(0,6) < 0$

D'après le théorème de la bijection, la fonction h s'annule une fois, et une seule, en α sur I et :
$$0,5 < \alpha < 0,6$$

c) Pour déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et d, il faut connaître le signe de $f(x) - x$. On a :

$$f(x) - x = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} = \frac{x + \ln x}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$$

Comme la fonction h est strictement croissante sur I et s'annule en α, on en déduit que :

$$\begin{array}{ll} x < \alpha, & f(x) - x < 0 \\ x > \alpha, & f(x) - x > 0 \end{array}$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de d en $+\infty$

2) a) On calcule la dérivée de f sur I :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{\frac{1}{x}x^2 - 2x\ln x}{x^4} \\
&= 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{x(1-2\ln x)}{x^4} \\
&= \frac{x^3 - x + 1 - 2\ln x}{x^3} \\
&= \frac{g(x)}{x^3}
\end{aligned}$$

On pose alors : $g(x) = x^3 - x + 1 - 2\ln x$

b) pour connaître le signe de g, on détermine ses variation par la fonction dérivée g'

$$g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3 - x + 1}{x}$$

On pose $k(x) = 3x^3 - x + 1$.
On a $x = 1$ racine évidente de $k(x)$. À l'aide d'une division euclidienne, on montre que :

$$k(x) = (x-1)(3x^2 + 3x + 2)$$

Le polynôme $3x^2 + 3x + 2$ n'a pas de racine car $\Delta = 9 - 24 = -15$. Donc :

$$\forall x \in I, \quad 3x^2 + 3x + 2 > 0$$

On en déduit que $k(x)$ est du signe de $x - 1$. On en déduit alors les variations de g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

On en déduit que : $\quad \forall x \in I, \quad g(x) \geqslant 0$.

c) Comme $x > 0$ et $g(x)$ sup 1 sur I, on a :

$$\forall x \in I, \quad f'(x) > 0$$

La fonction f est donc strictement croissante sur I.

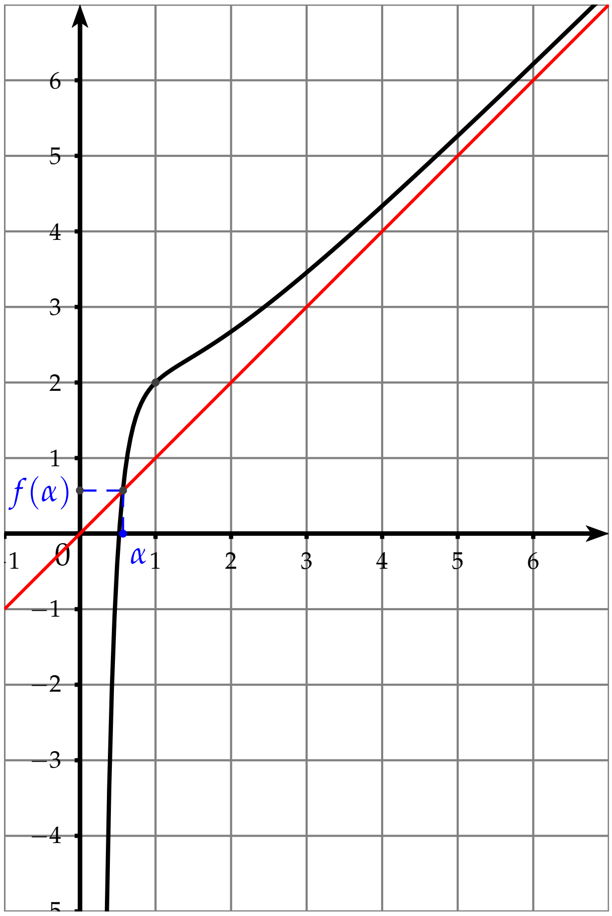
On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ car la droite d est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

De plus : $f(x) = x + \dfrac{x + \ln x}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0^+} x = 0 \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} x + \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0^+ \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Par quotient} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+\ln x}{x^2} = -\infty\end{array}$$

Par somme, on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

L'axe des ordonnées est donc asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$ en 0.
On trace alors la droite d et $\mathscr{C}_f$ en remarquant que d coupe $\mathscr{C}_f$ en α et en plaçant le point $(1, 2)$



5 Le logarithme décimal

5.1 Définition

Définition 2 : Soit un réel a strictement positif différent de 1, on appelle logarithme de base a, la fonction, notée $\log_a$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Remarque :

1) Ces fonctions sont appelées logarithme à juste titre car elles obéissent à la propriété :
$$f(xy) = f(x) + f(y)$$
En effet :
$$\log_a xy = \frac{\ln xy}{\ln a} = \frac{\ln x}{\ln a} + \frac{\ln y}{\ln a} = \log_a x + \log_a y$$

2) Le logarithme de base e est le logarithme népérien.

3) Le logarithme de base 10, appelé logarithme décimal, est noté : log au lieu de $\log_{10}$.

4) Ces fonctions sont dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et :
$$\log_a' x = \frac{1}{x \ln a}$$

5.2 Application sur le logarithme décimal

Le logarithme décimal est défini sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

1) Calculer $\log 10^n$ pour n entier relatif.
2) Étudier les variation de la fonction log et la représenter graphiquement.
3) Soit N un entier $(N \geqslant 1)$. Montrer que le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de N est $1 + E(\log N)$ où $E(x)$ représente la partie entière du réel x.
4) Application : avec combien de chiffres s'écrit 2009^{2010}.

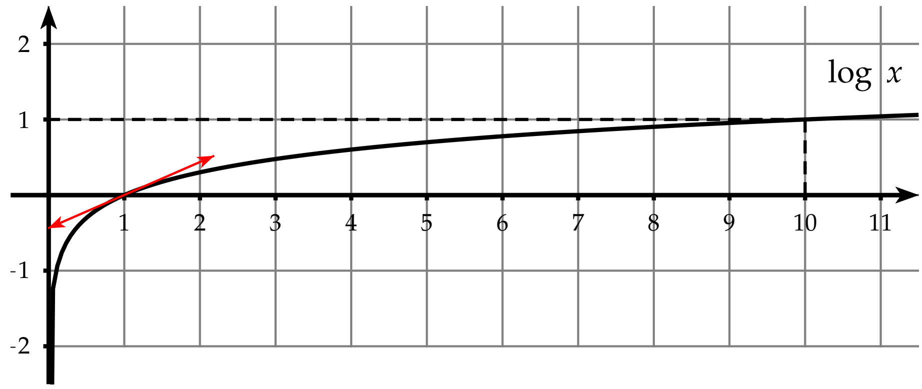
1) On calcule $\log 10^n$:
$$\log 10^n = \frac{\ln 10^n}{\ln 10} = \frac{n \ln 10}{\ln 10} = n$$
On peut remarquer notamment que : $\log 10^0 = \log 1 = 0$ et $\log 10 = 1$.

2) Étude de la fonction log.

D'après la définition $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10} = k \ln x$ avec $k = \dfrac{1}{\ln 10}$ donc $k > 0$

Compte tenu de cette remarque la fonction log a les mêmes variations et les mêmes limites que la fonction ln.

On a alors la représentation ci-dessous : $\log' x = \dfrac{1}{x \ln 10}$



3) Nombre de chiffres dans l'écriture décimale.
   Un nombre N, $N \geqslant 1$ est nécessairement compris entre deux puissances de 10. Soit alors :
$$10^p \leqslant N < 10^{p+1}$$
   Dans ce cas, N possède $p+1$ chiffres.

   Comme la fonction log est une fonction croissante, on a :
$$\log 10^p \leqslant \log N < \log 10^{p+1}$$
$$p \leqslant \log N < p+1$$

   On a donc : $E(\log N) = p$

   Conclusion : le nombre de chiffres de N est donc : $E(\log N) + 1$.

4) Application :
$$\log 2009^{2010} = 2010 \log 2009 \approx 6\,638{,}989\,7$$
   On en déduit alors que 2009^{2010} possède 6 639 chiffres.

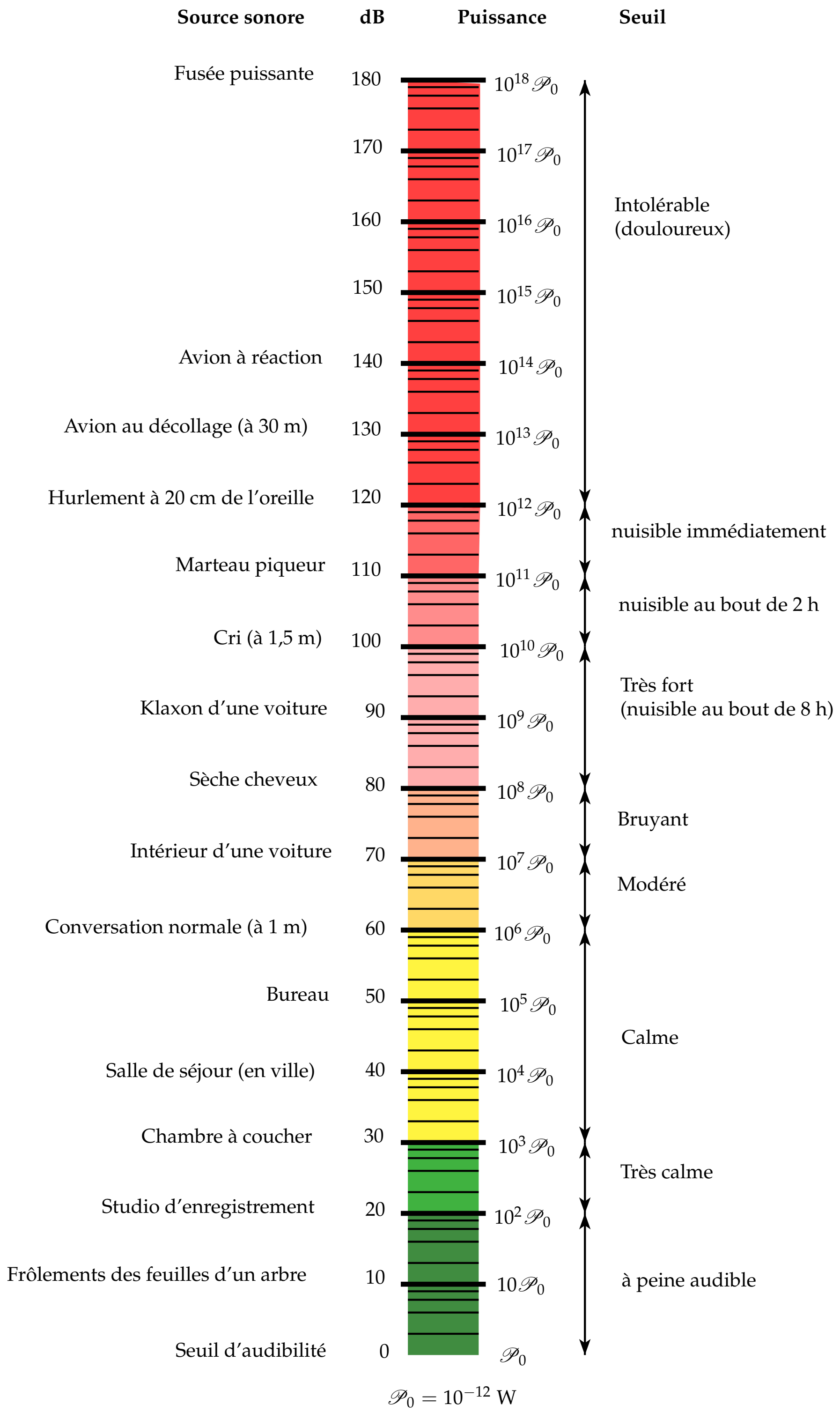
5.3 Quelques utilisations de la fonction log

1) **En chimie** : L'acidité d'une solution est mesuré par son pH : $pH = -\log[H^+]$

   ➪ Lorsque la concentration en $[H^+]$ est multiplié par 10, le pH diminue de 1. En effet :
$$-\log 10[H^+] = -(\log 10 + \log[H^+]) = -1 - \log[H^+]$$
   ➪ Si une étiquette d'une eau minérale d'au gazeuse indique $pH = 6,3$, on a :
$$pH = -\log[H^+] \quad \text{donc} \quad [H^+] = 10^{-pH}$$
$$[H^+] = 10^{-6,3} \approx 5 \times 10^{-7} \text{ mol/l}$$

2) **En acoustique** : l'intensité $\mathscr{I}$ (en décibels) d'un son de puissance $\mathscr{P}$ est donnée par : $\mathscr{I} = 10 \log \dfrac{\mathscr{P}}{\mathscr{P}_0}$

   où $\mathscr{P}_0 = 10^{-12}$ W correspond au seuil d'audibilité au dessous duquel aucun son n'est perçu.



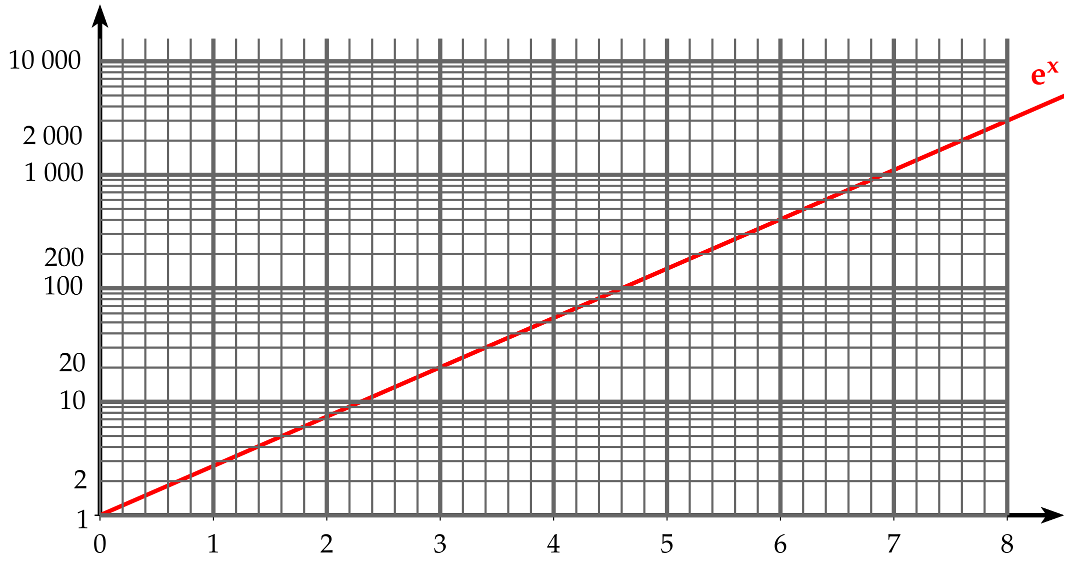
➪ Par exemple une conversation normale qui correspond à : $\mathscr{P} = 10^5 \mathscr{P}_0$ est de :

$$\mathscr{I} = 10 \log 10^5 = 10 \times 5 = 50 \text{ décibels}$$

3) Papier semi-logarithmique et logarithmique

➪ Le papier semi-logarithmique utilise une échelle linéaire sur l'axe des abscisses et une échelle logaritmique sur l'axe des ordonnées. Sur l'axe des ordonnées 10 correspond à 1 unité, 100 à 2 unités, 1 000 à 3 unités, . . .

Sur le papier semi-logarithmique ci-dessous, on a tracé la fonction exponentielle.



➪ Le papier logarithmique utilise une échelle logarithmique sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnée.
Sur le papier logarithmique ci-dessous, on a tracé quelques fonctions du type x^n ou $\sqrt[n]{x}$.