Exercices.

Les nombres complexes

Exercice I

Aspect géométrique

1) Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des point M dont l'affixe z vérifie l'égalité proposée.

   a) $|z| = 3$ b) $\text{Re}(z) = -2$ c) $\text{Im}(z) = 1$

2) a) D est le point de coordonnées $(\sqrt{3}; 3)$. Quel est son affixe ?

   b) On donne les points A, B, C d'affixes respectives :

   $$z_A = \sqrt{3} + i\ , \quad z_B = -\sqrt{3} - i\ , \quad z_C = 2i$$

   Calculer le module et un argument pour ces trois affixes. Que peut-on déduire pour les points A, B et C.

   c) Placer les points A, B, C et D à la règle et au compas.

   d) Quelle est la nature du quadrilatère $AOCD$. Pourquoi ?

   e) Quel est l'affixe du point E tel que $ODEB$ soit un parallélélogramme ?

Exercice II

Opération dans $\mathbb{C}$

Donner la forme algébrique des complexes suivant :

1) $z = 3 + 2i - 1 + 3i$
2) $z = -4 + 7i - (2 + 4i)$
3) $z = 12 - 3i - 4 - 5 + 8i)$
4) $z = (2 + i)(3 - 2i)$
5) $z = (1 + i)^2$
6) $z = (3 + i\sqrt{5})(3 - i\sqrt{5})$
7) $z = (4 - 3i)^2$
8) $z = (1 + i)(2 - 3i)(1 + i)$
9) $z = (2 + i)^2(1 - 2i)$
10) $z = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Exercice III

Rendre réel un dénominateur

Donner la forme algébrique des complexes suivants :

1) $z = \dfrac{1}{1 - i}$
2) $z = \dfrac{1}{2 - i\sqrt{3}}$
3) $z = \dfrac{1}{4 - 3i}$
4) $z = \dfrac{4 - 6i}{3 + 2i}$
5) $z = \dfrac{5 + 15i}{1 + 2i}$
6) $z = \dfrac{1 + 2i}{1 - 2i}$
7) $z = \dfrac{3 - 6i}{3 + i} + \dfrac{4}{3 - i}$
8) $z = \left(\dfrac{4 - 6i}{2 - 3i}\right)\left(\dfrac{1 + 3i}{3 + 2i}\right)$

Exercice IV

Résolution d'équation du premier degré dans $\mathbb{C}$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. Donner la solution sous forme algébrique.

1) $(1+i)z = 3-i$
2) $2z+1-i = iz+2$
3) $(2z+1-i)(iz+3) = 0$
4) $\dfrac{z+1}{z-1} = 2i$
5) $(iz+1)(z+3i)(z-1+4i) = 0$

Exercice V

Système dans $\mathbb{C}$

Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{C}$:

1) $\begin{cases} 3z+z' = 2-5i \\ z-z' = -2+i \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3z+z' = 5+2i \\ -z+z' = 1-2i \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2iz+z' = 2i \\ 3z-iz' = 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} z-z' = i \\ iz+z' = 1 \end{cases}$

Exercice VI

Nombre conjugué

1) Donner la forme algébrique du conjugué $\bar{z}$ des complexes suivants :
   a) $z = 3-4i$
   b) $z = \dfrac{1}{i-1}$
   c) $z = \dfrac{3-i}{1+i}$
   d) $z = \dfrac{2i+1}{i+2} + \dfrac{1-2i}{2-i}$
   e) $z = \dfrac{2i+1}{i+2} - \dfrac{1-2i}{2-i}$

2) Soit $z = x+iy$ avec x et y réels ; on note Z le nombre complexe : $Z = z - 2\bar{z} + 2$.
   a) Calculer en fonction de x et y la partie réel et la partie imaginaire de Z.
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z = 0$ d'inconnue z.

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnue z suivantes :
   a) $2\bar{z} = i-1$
   b) $(2z+1-i)(i\,\bar{z}+i-2) = 0$
   c) $\dfrac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} = i$

4) Soit $z = x+iy$ avec x et y réels.
   À tout complexe z, on associe $Z = 2\,\bar{z} - 2 + 6i$.
   a) Calculer en fonction de x et de y, les parties réelle et imaginaire de Z.
   b) Existe-t-il des complexe z tels que $Z = z$?

5) Dans le plan complexe, M est point d'affixe $z = x + iy$, x et y réels. À tout complexe z, $z \neq 1$, on associe : $z' = \dfrac{5z - 2}{z - 1}$

   a) Exprimer $z' + \overline{z'}$ en fonction de z et $\bar{z}$.

   b) Démontrer que « z' est un imaginaire pur » est équivaut à « M est un point d'un cercle privé d'un point ».

Exercice VII

Équation du second degré

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, chacune des équations suivantes.

   a) $2z^2 - 6z + 5 = 0$

   b) $z^2 - 5z + 9 = 0$

   c) $z^2 - 2z + 3 = 0$

   d) $z^2 = z + 1$

   e) $z^2 + 3 = 0$

   f) $z^2 - 2(1 + \sqrt{2})z + 2(\sqrt{2} + 2) = 0$

2) θ est un réel donné

   a) Résoudre l'équation (E) : $z^2 - 2\cos\theta\, z + 1 = 0$

   b) Dans le plan complexe $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$, A et B sont les point ayant pour affixe les solutions de l'équation (E). Quelles sont les valeurs de θ pour lesquelles le triangle OAB est équilatéral ?

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système suivant : $\begin{cases} z_1 z_2 = 5 \\ z_1 + z_2 = 2 \end{cases}$

4) Trouver le complexe p et q tels que l'équation :

$$z^2 + pz + q = 0$$

   admette pour solutions les nombres : $1 + 2i$ et $3 - 5i$

5) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

   a) $z^4 + 3z^2 + 2 = 0$

   b) $z^4 - 32z^2 - 144 = 0$

Exercice VIII

Équations de degré supérieur

1) On pose pour tout complexe z,

$$f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$$

   a) Vérifier que : $f(z) = (z - 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$

   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(x) = 0$

2) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ puis déduire les solutions de $z^3 - 1 = 0$

b) On désigne par j le complexe : $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

➪ Calculer j^2, j^3, $j^{2\,006}$

➪ Calculer $S = 1 + j + j^2 + \cdots + j^{2\,006}$

3) On considère le polynôme : $P(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40$

a) Déterminer les réels a et b tels que : $P(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a)$

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'équation : $P(z) = 0$

4) Pour tout complexe z, on considère :

$$f(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261$$

a) b est réel. Exprimer en fonction de b les parties réelle et imaginaires de $f(b)$.

b) En déduire que 'équation $f(z) = 0$ admet deux nombres imaginaires purs comme solution.

c) Démontrer qu'il existe deux nombres réels α et β que l'on déterminera, tels que, pour tout nombre complexe z,

$$f(z) = (z^2 + 9)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

d) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z) = 0$

Exercice IX

Forme trigonométrique d'un nombre complexe

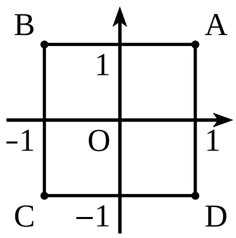
1) Donner la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = 2 + 2i\sqrt{3}$ c) $z_3 = 4 - 4i$ e) $z_5 = -2i$

b) $z_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ d) $z_4 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{i\sqrt{3}}{4}$ f) $z_6 = \dfrac{4}{1-i}$

2) Dans le repère orthonormal direct,on a représenté le carré ABCD ci-contre.

Donner l'affixe et un argument de chacun des sommets du carré $ABCD$



3) À l'aide d'une calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-2} près d'un argument de chacun des nombres complexes suivants :

a) $z = 4 - 3i$ b) $z = 1 + 2i$ c) $z = -2 + i$

4) Trouver une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

a) $z = (1 - i)^2$ b) $z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$ c) $z = \dfrac{(\sqrt{3} + i)^9}{(1 + i)^{12}}$

Exercice X

Ligne trigonométrique

On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$

1) Donner une forme trigonométrique de z_1, z_2 et $\dfrac{z_1}{z_2}$

2) Donner la forme algébrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$

3) En déduire que :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Exercice XI

La formule de Machin

On rappelle que pour tou réel t ($t \geqslant 0$), il existe un unique réel α de $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan\alpha = t$: ce réel est noté $\tan^{-1} t$.

1) Donner la forme algébrique de $z = (5 - i)^4(1 + i)$.

2) On pose $\alpha = \tan^{-1}\dfrac{1}{5}$ et $\beta = \tan^{-1}\dfrac{1}{239}$
Montrer que $-\alpha$ est un argument de $5 - i$ et $-\beta$ un argument de z.
En déduire que $4\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{4} \quad [2\pi]$

3) Prouver en fait que $4\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{4}$

Note : La formule $\dfrac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\dfrac{1}{5} - \tan^{-1}\dfrac{1}{239}$ *permit à John Machin, en 1706 de calculer les 100 premières décimales de* π.

Exercice XII

Forme exponentielle

1) Donner une forme exponentielle de chacun des complexes suivants :

a) $z_1 = 2\sqrt{3} + 6i$ b) $z_2 = (1 + i\sqrt{3})^4$ c) $z_3 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{5} - i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$

2) Dans chacun des cas suivants, écrire z sous la forme exponentielle et en déduire la forme algébrique de $\cong z$ et $\dfrac{1}{z}$.

a) $z = \dfrac{6}{1 + i}$ b) $z = (1 + i\sqrt{3})^4$ c) $z = 3i\, e^{i\frac{\pi}{3}}$ d) $z = -12e^{i\frac{\pi}{4}}$

Exercice XIII

Ensemble de points

Déterminer et construire l'ensemble E des points dont l'affixe z vérifie la condition proposée.

1) $z = 3e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in [0; 2\pi[$
2) $z = r\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ avec $r \in [0; +\infty[$
3) $z = k\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$ avec $k \in \mathbb{R}$

Exercice XIV

Ensemble de points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
On appelle f l'application, qui, à tout nombre complexe z différent de $-2i$, associe

$$Z = f(z) = \frac{z - 2 + i}{z + 2i}.$$

1) On pose $z = x + iy$, avec x et y deux réels, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et de y.

   On vérifiera que $\mathrm{Re}(Z) = \dfrac{x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2}{x^2 + (y + 2)^2}$.

2) En déduire la nature de :
   a) l'ensemble E des points M d'affixe z, tels que Z soit un réel ;
   b) l'ensemble F des points M d'affixe z du plan, tels que Z soit un imaginaire pur éventuellement nul.
   c) Représenter ces deux ensembles.

Exercice XV

La Réunion juin 2010

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère le point A d'affixe $1 + i$.
On associe, à tout point M du plan d'affixe z non nulle, le point M' d'affixe

$$z' = \frac{z - 1 - \mathrm{i}}{z}.$$

Le point M' est appelé le point image du point M.

1) a) Déterminer, sous forme algébrique, l'affixe du point B′, image du point B d'affixe i.
   b) Montrer que, pour tout point M du plan d'affixe z non nulle, l'affixe z' du point M' est telle que $z' \neq 1$.
2) Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z non nulle pour lesquels l'affixe du point M' est telle que $|z'| = 1$.
3) Quel est l'ensemble des points M du plan d'affixe z non nulle pour lesquels l'affixe du point M' est un nombre réel ?

Exercice XVI

Complexe et fonction

Le plan complexe est rapporté à un repère orthnormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

À tout point m d'affixe z, on associe le point M d'affixe : $Z = \dfrac{z^3}{2+|z|^3}$. On note $z = re^{\alpha}$ et $Z = \rho e^{i\theta}$

1) Exprimer ρ et θ en fonction de r et α.
2) On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1 et T le point d'affixe $1-i$.
   a) Quel est l'ensemble des points M lorsque m décrit le cercle $\mathscr{C}$?
   b) Quel est l'ensemble des points M lorsque m décrit la demi-droite [OT) ?
3) On note f la fonction définie sur $I = [0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3}{2+x^3}$$

   a) Étudier les variations de f et en déduire que f est strictement croissante sur I et que l'image de I par f est l'intervalle $[0; 1[$.
   b) En déduire que, lorsque m est un point quelconque du plan complexe, le point M est un point d'un disque que l'on précisera.

Exercice XVII

Complexe et géométrie

1) On donne les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c

$$a = 1 + \frac{3}{4}i \quad b = 2 - \frac{5}{4}i \quad c = 3 + \frac{7}{4}i$$

   a) Placer les points A, B et C.
   b) Quelle est la nature du triangle ABC ?
   c) Calculer l'affixe de A' tel que ABA'C soit un carré.

2) Les points A, B, C, D ont pour affixes respectives

$$a = 2 - 2i, \quad b = -1 + 7i, \quad c = 4 + 2i, \quad d = -4 - 2i$$

   a) Ω est le point d'affixe $\omega = -1 + 2i$
   Prouver que A, B, C, D appartiennent au cercle de centre Ω et de rayon 5.
   b) On note e l'affixe du milieu E de [AB].
   Calculez e puis prouver que $\dfrac{a-e}{d-e} = \dfrac{c-e}{a-e}$
   La droite (EA) est une droite remarquable du triangle DEC ; préciser laquelle.

3) A et B ont pour affixes respectives 1 et $3 + 2i$.
   Dans chacun des cas, donner l'ensemble des point M dont l'affixe z satisfait la condition suivante :

a) $|z-1| = |z-(3+2i)|$ b) $|z-(3+2i)| = 1$

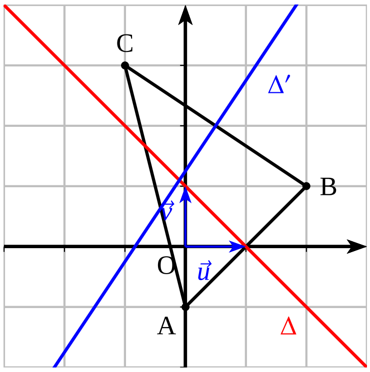
Exercice XVIII

Ensemble de points

Sur la figure ci-contre, on a placé les points A, B, C d'affixes :

$$a = -i, \quad b = 2+i, \quad c = -1+3i$$

et les droites Δ et Δ' médiatrices de [AB] et [BC].



1) a) Prouvez que :

$$M(z) \in \Delta \quad \Leftrightarrow \quad |z-(-i)| = |z-2-i|$$

b) Caractériser de manière analogue l'appartenance d'un point $M(z)$ à la médiatrice Δ'

c) Représentez l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

$$|z+i| = |z-2-i| = |z+1-3i|$$

2) a) Quel est l'ensemble $\mathscr{P}$ des points $M(z)$ tels que :

$$|z+i| \geqslant |z-2-i|$$

b) Quel est l'ensemble $\mathscr{P}'$ des points $M(z)$ tels que :

$$|z+1-3i| \geqslant |z-2-i|$$

c) Coloriez la région du plan qui représente l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

$$|z+i| \geqslant |z-2-i| \quad \text{et} \quad |z+1-3i| \geqslant |z-2-i|$$

Exercice XIX

Asie juin 2004

A est le point d'affixe $3i$.

On appelle f la fonction qui, à tout point M d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{3iz-7}{z-3i}$$

1) **Recherche des points invariants par f**

a) Développez $(z-7i)(z+i)$.

b) Prouver que f admet deux points invariants B et C dont vous préciserez les coordonnées.

2) On appelle $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [BC].
M désigne un point de $\mathscr{C}$ ($M \neq$ B, $M \neq$ C) et M' son image par f.

a) Justifiez que l'affixe z de M est telle que :

$$z = 3i + 4e^{i\theta} \quad \text{où A est un nombre réel}$$

b) Exprimez l'affixe z' de M' en fonction de θ et en déduire que M' appartient aussi à $\mathscr{C}$.

c) Démontrez que $z' = -\bar{z}$ puis en déduire, en la justifiant, une construction géométrique de M'.

3) On considère un cercle de centre A et de rayon r (r réel positif).
Précisez l'image de ce cercle par f.

Exercice XX

Liban mai 2000

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A et B d'affixes respectives i et $-i$.
Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z distincte de $-i$ associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{1 + iz}{z + i}.$$

1) Quelle est l'image par l'application f du point O ?

2) Quel est le point qui a pour image par l'application f le point C d'affixe $1 + i$?

3) Montrer que l'équation $\dfrac{1 + iz}{z + i} = z$ admet deux solutions que l'on déterminera.

4) Vérifier que $z' = \dfrac{i(z - i)}{z + i}$, en déduire $\mathrm{O}M' = \dfrac{\mathrm{A}M}{\mathrm{B}M}$ et :

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{O}M'}\right) = \left(\overrightarrow{M\mathrm{B}}, \overrightarrow{M\mathrm{A}}\right) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}.$$

5) Montrer que tous les points de l'axe des abscisses ont leurs images par l'application f situées sur un même cercle (C) que l'on précisera.

6) Soit M un point du cercle de diamètre [AB] différent de A et de B, montrer que son image M' est située sur l'axe des abscisses.

Exercice XXI

Rotation et homothétie

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives

$$a = i, \quad b = 2 + 3i \quad et \quad c = 2 - 3i$$

1) Placer les points A, B et C.

2) Soit r la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.
   Déterminer l'affixe du point A′, image du point A par la rotation r.
3) Démontrer que les points A′, B et C sont alignés et déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre B qui transforme C en A′.