Les nombres complexes

Table des matières

1 Introduction

1.1 Un problème historique

À la fin du XVI^e siècle, on s'est intéressé à la résolution des équations du troisième degré. On montra rapidement que à l'aide d'un changement de variable toute équation du troisième degré peut se mettre sous la forme

$$x^3 + px + q = 0$$

Cette équation admet au moins un racine réel, dont l'expression peut se mettre sous la forme (un peu complexe) :

$$x_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Un mathématicien italien de l'époque, Bombelli, s'intéressa de près à l'équation :

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

Qui donne alors comme solution : $p = -15$ et $q = -4$

$$\begin{aligned} x_0 &= \sqrt[3]{2 - \sqrt{4-125}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{4-125}} \\ x_0 &= \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} \\ &= \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} \end{aligned}$$

La racine $\sqrt{-1}$ posait problème.

Cependant il remarqua que s'il posait $(\sqrt{-1})^2 = -1$, on obtenait en developpant $(2 - \sqrt{-1})^3$ et $(2 + \sqrt{-1})^3$:

On rappelle que :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \text{et} \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\begin{aligned} (2 - \sqrt{-1})^3 &= 2^3 - 3(2)^2\sqrt{-1} + 3(2)(\sqrt{-1})^2 - (\sqrt{-1})^3 \\ &= 8 - 12\sqrt{-1} + 6(-1) - (-1)\sqrt{-1} \\ &= 2 - 11\sqrt{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{-1})^3 &= 2^3 + 3(2)^2\sqrt{-1} + 3(2)(\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 \\ &= 8 + 12\sqrt{-1} + 6(-1) + (-1)\sqrt{-1} \\ &= 2 + 11\sqrt{-1} \qquad \text{donc} \end{aligned}$$

$$x_0 = 2 - \sqrt{-1} + 2 + \sqrt{-1} = 4$$

On constate effectivement que 4 est solution de l'équation. En effet :

$$4^3 - 15 \times 4 - 4 = 64 - 60 - 4 = 0$$

Conclusion : $\sqrt{-1}$ n'existe pas, mais permet de trouver la solution d'une équation. Il s'agit d'un intermediaire de calcul. Les nombres complexes étaient nés ! !

Au XVII$^{\text{e}}$ siècle ces nombres deviennent des intermédiaires de calcul courant, mais on ne les considèrent pas encore comme des nombres.

Au XVIII$^{\text{e}}$ siècle on montre que tous ces nombres peuvent se mettre sous la forme $a + b\sqrt{-1}$.

Euler propose alors de noter $\sqrt{-1} = i$. i comme « imaginaire ».

Au XIX$^{\text{e}}$ siècle Gauss montre que l'on peut représenter de tels nombres. Ils obtiennent alors le statut de nombres.

1.2 Création d'un nouvel ensemble

Cette découverte est assez fréquente en mathématique. Qu'on se rappelle les solutions des équations suivante.

- Résolution dans $\mathbb{N}$ de l'équation $x + 7 = 6$.

  Cette équation n'a pas de solution, mais en créant les entiers relatifs, on obtient alors $x = -1$

- Résolution dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $3x = 1$.

  Cette équation n'a pas de solution, mais en créant les nombres rationnels, on obtient $x = \dfrac{1}{3}$.

- Résolution dans $\mathbb{Q}$ de l'équation $x^2 = 2$.

  Cette équation n'a pas de solution, mais en créant les nombres réels, on obtient $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$.

- Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 + 1 = 0$.

  Cette équation n'a pas de solution donc on va construire un ensemble que l'on appelle $\mathbb{C}$ (complexe) dont l'élément principal ajouté est le nombre i tel que $i^2 = -1$. On obtient donc comme solution $x = i$ et $x = -i$

La démarche naturel consiste donc à chercher un ensemble plus grand qui contient l'ancien et qui vérifient les mêmes propriétés et qui puisse se représenter.

2 Construction des nombres complexes

2.1 Définition

Définition 1 : On appelle l'ensemble des nombre complexes, noté $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres z de la forme :

$$z = a + ib \quad \text{avec}(a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad i^2 = -1$$

le nombre réel a s'appelle la **partie réelle** de z notée : $\text{Re}(z)$
Le nombre réel b s'appalle la **partie imaginaire** de z noté : $\text{Im}(z)$.
Cette forme $z = a + ib$ est appelée **forme algébrique**.

Remarque :
1) Tout nombre réel appartient à $\mathbb{C}$ (faire $b = 0$).
2) Si $a = 0$ on dit que z est un imaginaire pur

2.2 Représentation des nombres complexes

Théorème 1 : A tout nombre complexe $z = a + ib$, on peut faire correspondre un point $M(a; b)$ dans un plan orthonormal $(\text{O}, \vec{u}, \vec{v})$
On dit que z est **l'affixe** de M. On écrit alors $M(z)$.

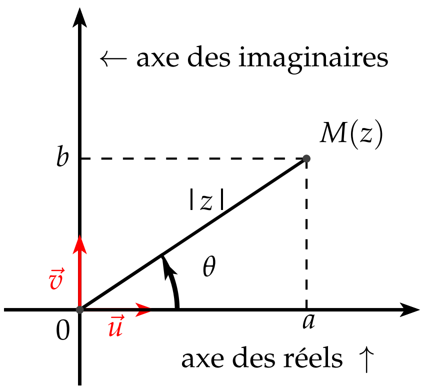
Propriétés : Cette application est réciproque (bijective). A tout point $M(x; y)$ d'un plan muni d'un repère orthonormal, on peut associer un nombre complexe $z = x + iy$.

Conclusion : On peut représenter alors le nombre complexe $z = a + ib$.

On appelle module de z la distance OM, c'est la dire la quantité notée $|z|$ tel que :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Si $z \in \mathbb{R}$, on a $z = a$ et $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$ qui n'est autre que la valeur absolue du réel a (même réalité donc même notation.



De même on appelle argument de z, une mesure de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$, c'est à dire la quantité notée $\arg(z)$ telle que si θ est un argument de z on ait :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{|z|} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \theta = \arg(z) \quad [2\pi]$$

Exemples :

1) Déterminer le module des nombres complexes suivants :
$z_1 = 1+i \quad , \quad z_2 = 1-\sqrt{3}i \quad , \quad z_3 = -4+3i$

$|z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$\theta_1 = \dfrac{\pi}{4}$

$|z_2| = \sqrt{1+3} = 2$

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$\theta_2 = -\dfrac{\pi}{3}$

$|z_3| = \sqrt{16+9} = 5$

$$\begin{cases} \cos\theta_3 = -\dfrac{4}{5} \\ \sin\theta_3 = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

$\theta_3 = \arccos -\dfrac{4}{5}$
$\simeq 143^\circ$

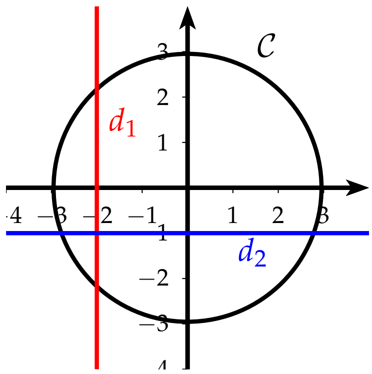
2) Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des point M dont l'affixe z vérifie l'égalité proposée.

a) $|z| = 3$ b) $\text{Re}(z) = -2$ c) $\text{Im}(z) = 1$

a) $|z| = 3$: cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 3

b) $\text{Re}(x) = -2$: Droite d_1 parallèle à l'axe des ordonnées d'abscisse -2

c) $\text{Im}(z) = 1$: Droite d_2 parallèle à l'axe des abscisses d'ordonnée 1



2.3 Opérations avec les complexes

Dans l'ensemble des nombres complexes on définit deux opérations :

➪ **L'addition (+) :**

$$\text{si} \quad z = a+ib \quad \text{et} \quad z' = a'+ib' \quad \text{alors} \quad z+z' = (a+a') + i(b+b')$$

➪ **La multiplication (×) :**

$$\text{si} \quad z = a+ib \quad \text{et} \quad z' = a'+ib' \quad \text{alors} \quad z \times z' = (aa'-bb') + i(ab'+a'b)$$

L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ muni des lois de l'addition et de la multiplication est un corps commutatif. Il possède donc toutes les propriétés de ces deux lois dans l'ensemble des nombres réel $\mathbb{R}$. C'est à dire : la communitativité et associativité de l'addition et de la multiplication, distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, ...

Pour qu'un nombre complexe soit nul, il faut que sa partie réelle et sa partie imaginaire soient nulles :

$$a+ib = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0$$

Exemples : Effectuer les opérations suivantes :

$$\begin{aligned} z_1 &= 4+7i-(2+4i) = 4+7i-2-4i = 2+3i \\ z_2 &= (2+i)(3-2i) = 6-4i+3i+2 = 8-i \\ z_3 &= (4-3i)^2 = 16-24i-9 = 7-24i \end{aligned}$$

2.4 Conjugué

2.4.1 Définition

Définition 2 : Soit z un nombre complexe dont la forme algébrique est : $z = a+ib$. On appelle le nombre conjugué de z, le nombre noté $\overline{z}$ tel que :

$$\overline{z} = a - ib$$

Conséquence Interprétation géométrique.

Le point $M'(\overline{z})$ est le symétrique du point $M(z)$ par rapport à l'axe des abscisses.

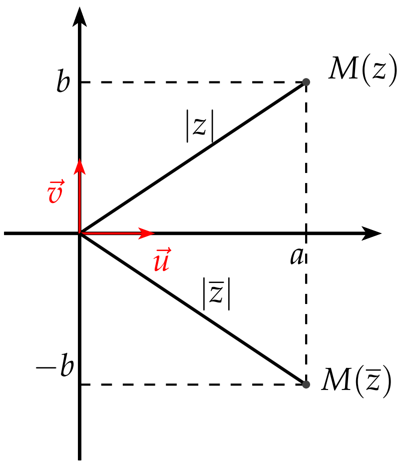
On a alors :

$$z\overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$$

En effet :

$$(a+ib)(a-ib) = a^2 - iab + iab + b^2$$

Cela permet de rendre réel un dénominateur.



2.4.2 Applications

1) Trouver la forme algébrique du quotient

Exemple : Trouver la forme algébrique du complexe suivant : $z = \dfrac{2-i}{3+2i}$

On multiplie la fraction en haut et en bas par le complexe conjugué du dénominateur :

$$z = \frac{(2-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{6-4i-3i-2}{9+4} = \frac{4-7i}{13} = \frac{4}{13} - \frac{7}{13}i$$

2) Résoudre une équation du premier degré

Exemple : Résoudre l'équation suivante : $z = (2-i)z + 3$

$$\begin{aligned}
z &= (2-i)z+3\\
z-(2-i)z &= 3\\
z(1-2+i) &= 3\\
z &= \frac{3}{-1+i} = \frac{-3}{1-i}\\
z &= \frac{-3(1+i)}{(1-i)(1+i)}\\
z &= -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i
\end{aligned}$$

2.4.3 Propriétés

Propriété 1 : Soit z un nombre complexe et $\bar{z}$ son conjugué. On a :

$$z+z' = 2\mathrm{Re}(z) \qquad z \text{ est un imaginaire pur alors : } \quad z+\bar{z}=0$$
$$z-z' = 2\mathrm{Im}(z) \qquad z \text{ est réel alors : } \quad z=\bar{z}$$

Règle 1 : Pour tous complexes z et z', on a :

$$\overline{z+z'} = \bar{z}+\overline{z'} \quad , \quad \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \overline{z'}$$
$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}} \quad , \quad \overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

Exemples :

1) Donner la forme algébrique du conjugué $\bar{z}$ du complexe suivant : $z = \dfrac{3-i}{1+i}$

$$\begin{aligned}
\bar{z} &= \overline{\left(\frac{3-i}{1+i}\right)} = \frac{\overline{3-i}}{\overline{1+i}}\\
&= \frac{3+i}{1-i}\\
&= \frac{(3+i)(1+i)}{1+1}\\
&= \frac{3+3i+i-1}{2}\\
&= 1+2i
\end{aligned}$$

2) Dans le plan complexe, M est point d'affixe $z = x+iy$, x et y réels. À tout complexe z, $z \neq 1$, on associe : $Z = \dfrac{5z-2}{z-1}$

a) Exprimer $Z+\overline{Z}$ en fonction de z et $\overline{z}$.

b) Démontrer que « Z est un imaginaire pur » est équivaut à « M est un point d'un cercle privé d'un point ».

a) On calcule $Z+\overline{Z}$

$$\begin{aligned}
Z+\overline{Z} &= \frac{5z-2}{z-1}+\overline{\left(\frac{5z-2}{z-1}\right)}\\
&= \frac{5z-2}{z-1}+\frac{5\overline{z}-2}{\overline{z}-1}\\
&= \frac{(5z-2)(\overline{z}-1)+(5\overline{z}-2)(z-1)}{(z-1)(\overline{z}-1)}\\
&= \frac{5z\overline{z}-5z-2\overline{z}+2+5z\overline{z}-5\overline{z}-2z+2}{(z-1)(\overline{z}-1)}\\
&= \frac{10z\overline{z}-7(z+\overline{z})+4}{(z-1)(\overline{z}-1)}
\end{aligned}$$

b) Si Z est un imaginaire pur alors $Z+\overline{Z}=0$. On en déduit donc que :

$$\begin{aligned}
10z\overline{z}-7(z+\overline{z})+4 &= 0\\
10|z|^2-14\text{Re}(z)+4 &= 0\\
10(x^2+y^2)-14x+4 &= 0\\
x^2+y^2-\frac{7}{5}+\frac{2}{5} &= 0\\
\left(x-\frac{7}{10}\right)^2-\frac{49}{100}+y^2+\frac{2}{5} &= 0\\
\left(x-\frac{7}{10}\right)^2+y^2-\frac{9}{100} &= 0\\
\left(x-\frac{7}{10}\right)^2+y^2 &= \left(\frac{3}{10}\right)^2
\end{aligned}$$

On en déduit que le point $M(z)$ est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{7}{10}\right)$ et de rayon $\frac{3}{10}$ privé du point $A(1)$

3 Équation du second degré

3.1 Résolution

Les nombres complexes ont été créés pour que l'équation du second degré ait toujours des solutions.

Théorème 2 : Toute équation du second degré dans $\mathbb{C}$ admet toujours 2 solutions distinctes ou confondues. Si cette équation est à coefficients réels, c'est à dire,

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{avec } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \text{ et } c \in \mathbb{R}$$

Elle admet comme solutions dans $\mathbb{C}$.

1) Si $\Delta > 0$, deux solutions réelles :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2) Si $\Delta = 0$, une solution réelle double :

$$z_0 = -\frac{b}{2a}$$

3) Si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguée avec $\Delta = i^2|\Delta|$

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Exemple : Résoudre l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$

On calcule $\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$. On obtient donc les solutions complexes suivantes :

$$z' = \frac{2+2i}{2} = 1 + i \quad \text{et} \quad z'' = \frac{2-2i}{2} = 1 - i$$

3.2 Application aux équations de degré supérieur

Théorème 3 : Tout polynôme de degré n dans $\mathbb{C}$ admet n racines distinctes ou composées. Si a est un racine alors le polynôme peut se factoriser par $(z - a)$

Soit l'équation dans $\mathbb{C}$ suivante : $z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0$

1) Montrer que i est solution de l'équation

2) Déterminer les réels a, b et c tels que :
$z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = (z-i)(az^2 + bz + c)$.

3) Résoudre l'équation

$\Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow$

1) On vérifie que i est solution de l'équation :
$i^3 - (4+i)i^2 + (13+4i)i - 13i = -i + 4 + i + 13i - 4 - 13i = 0$
donc i est bien solution de l'équation. On peut donc factiriser par $(z - i)$.

2) On développe et on identifie à la première forme :

$$\begin{aligned}(z-i)(az^2+bz+c) &= az^3+bz^2+cz-iaz^2-ibz-ic\\ &= az^3+(b-ia)z^2+(c-ib)z-ic\end{aligned}$$

On identifie, et l'on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a=1\\ b-ia=-4-i\\ c-ib=13+4i\\ -ic=-13i\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1\\ b=-4\\ c=13\end{cases}$$

3) L'équation devient donc : $(z-i)(z^2-4z+13)=0$
On a donc $\quad z=i \quad$ ou $\quad z^2-4z+13=0.$

On calcule $\Delta = 16-52=-36=(6i)^2$
On obtient donc 2 solutions complexes conjugués :

$$z' = \frac{4+6i}{2} = 2+3i \quad \text{ou} \quad z'' = \frac{4-6i}{2} = 2-3i$$

Conclusion : $\quad S=\{i\,;\,2-3i\,;\,2+3i\}$

4 Forme trigonométrique et exponentielle

4.1 Forme trigonométrique

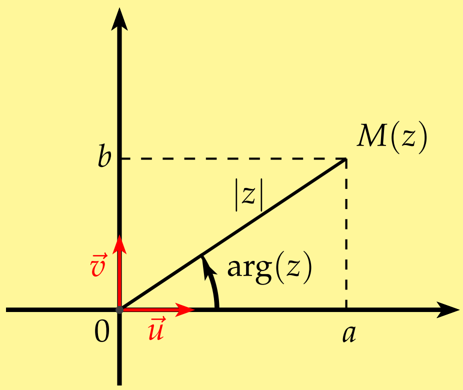
4.1.1 Définition

Définition 3 : On appelle forme trigonométrique d'un nombre complexe z ($z \neq 0$) dont l'écriture algébrique est $a+ib$, l'écriture suivante :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

avec

$$r=|z| \quad et \quad \theta = \arg(z) \quad [2\pi]$$



Remarque : La forme trigonomètrique est à relier aux coordonnées polaire d'un point.

Exemples :

1) Trouver la forme trigonométrique de $z=1-i$
On détermine le module : $|z| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

On détermine un argument : $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

On en déduit que $\theta = -\dfrac{\pi}{4} \quad [2\pi]$, d'où :

$$z = \sqrt{2}(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4})$$

2) Trouver la forme algébrique de $z = \sqrt{3}(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3})$

On a $z = \sqrt{3}(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$

4.1.2 Propriétés des modules et arguments

Théorème 4 : Pour tous complexes z et z' non nuls, on a les relations suivantes :

$$|z\,z'| = |z|\,|z'| \quad \text{et} \quad \arg(z\,z') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$$
$$|z^n| = |z|^n \quad \text{et} \quad \arg(z^n) = n\arg(z) \quad [2\pi]$$
$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$$

Démonstration : Soient deux complexes $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'\,(\cos\theta' + i\sin\theta')$. On a alors :

$$\begin{aligned}
z\,z' &= r\,r'(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta')\\
&= r\,r'(\cos\theta\cos\theta' + i\cos\theta\sin\theta' + i\sin\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta')\\
&= r\,r'(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')\\
&= r\,r'(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta'))
\end{aligned}$$

Par identification, on en déduit alors :

$$|z\,z'| = r\,r' = |z|\,|z'| \quad \text{et} \quad \arg(z\,z') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$$

On démontre $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n\arg(z)$ par récurrence à partir de la propriété du produit.

Pour le quotient, on pose $Z = \dfrac{z}{z'}$, on a donc $z = Z\,z'$. Par la propriété du produit, on a :

$$|z| = |Z||z'| \quad \Leftrightarrow \quad |Z| = \frac{|z|}{|z'|}$$
$$\arg(z) = \arg(Z) + \arg(z') \quad [2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad \arg(Z) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$$

4.1.3 Formule de Moivre

Théorème 5 : Pour tout nombre complexe $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ non nul, on a :

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

Remarque : Cette formule découle de la propriété module argument de z^n.

Exemples :

1) Trouver la forme algébrique de $(1-i\sqrt{3})^5$

On détermine la forme trigonométrique de $z = 1 - i\sqrt{3}$, on a alors :

$$|z| = \sqrt{1+3} = 2 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \theta = -\frac{\pi}{3}$$

donc :

$$\begin{aligned}
(1-i\sqrt{3})^5 &= \left[2\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right)\right]^5 \\
&= 2^5\left(\cos\frac{-5\pi}{3} + i\sin\frac{-5\pi}{3}\right) \\
&= 32\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{car} \quad \frac{-5\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \\
&= 32\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
&= 16 + 16\sqrt{3}i
\end{aligned}$$

2) Déterminer la forme algébrique de $\dfrac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}+i)^3}$

On a alors :

$$\begin{aligned}
1+i &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\
(1+i)^4 &= (\sqrt{2})^4(\cos\pi + i\sin\pi) \\
&= 4(-1) = -4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}+i &= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \\
(\sqrt{3}+i)^3 &= 2^3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \\
&= 8i
\end{aligned}$$

$$\text{donc} \quad \frac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}+i)^3} = -\frac{4}{8i} = -\frac{1}{2i} = \frac{1}{2}i$$

4.2 Forme exponentielle

4.2.1 Définition

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par : $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$.

Calculons $f(\theta)f(\theta')$

$$\begin{aligned}
f(\theta)f(\theta') &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') \\
&= (\cos\theta\cos\theta' + i\cos\theta\sin\theta' + i\sin\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') \\
&= (\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta') \\
&= (\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')) \\
&= f(\theta+\theta')
\end{aligned}$$

On trouve donc $f(\theta+\theta') = f(\theta)f(\theta')$. C'est la propriété de la fonction exponentielle : l'exponentielle de la somme est égale au produit des exponentielles.

Dérivons la fonction f pour s'en assurer :

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= -\sin\theta + i\cos\theta \\ &= i^2\sin\theta + i\cos\theta \\ &= i(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= if(\theta) \end{aligned}$$

On retrouve le résultat de l'équation différentielle $y' = ky$

Pour ces deux raisons, on décide de poser $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Définition 4 : On appelle forme exponentielle d'un nombre complexe z la forme :

$$z = re^{i\theta}$$

avec $\quad r = |z| \quad$ et $\quad \theta = \arg(z) \quad [2\pi]$

Remarque : On peut maintenant admirer l'expression : $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Cette expression contient les nombres qui ont marqué les mathématiques au cours de l'histoire : 0 et 1 pour l'arithmétique, π pour la géométrie, i pour les nombres complexes et e pour l'analyse.

4.2.2 Formules d'Euler

On peut à l'aide de la forme exponentielle trouver l'expression de la fonction cosinus et la fonction sinus à l'aide de l'exponentielle.

On a le système suivant :

$$\begin{cases} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \end{cases}$$

On trouve alors facilement par addition et soustraction des équations, les formules suivantes :

Définition 5 : Formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

5 Application des complexes à la géométrie

5.1 Complexes et vecteurs

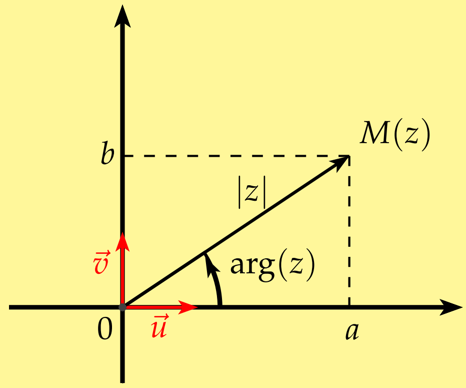
5.1.1 Définition

Définition 6 : Soit le plan complexe muni du repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on a alors si le point $M(z)$

$$z_{\overrightarrow{OM}} = z$$

et

$$OM = |z| \quad \text{et} \quad (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \arg(z)$$



5.1.2 Affixe d'un vecteur

Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$, on a :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$
$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$$

Règle 2 : Pour tous points A et B du plan complexe, on a :

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$$
$$AB = |z_B - z_A|$$
$$(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$$

5.1.3 Somme de deux vecteurs

Théorème 6 : Soit $\overrightarrow{u_1}(z_1)$, $\overrightarrow{u_2}(z_2)$ et $\overrightarrow{u_3}(z_3)$ tel que :

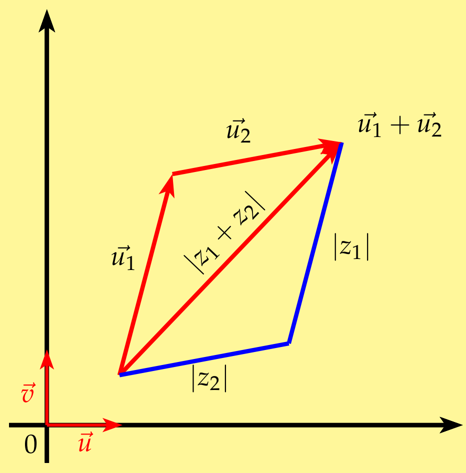
$$\overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$$

On en déduit que :

$$z_3 = z_1 + z_2$$

et l'inégalité triangulaire :

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$



5.1.4 Angle orienté

D'après les règles sur les angles orientés, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) &= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}) + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{CD}) \\
&=)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{CD}) - (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB} \\
&= \arg(z_{\overrightarrow{CD}}) - \arg(z_{\overrightarrow{AB}}) \\
&= \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) \\
&= \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit :

Théorème 7 : Pour tous points A, B, C et D tels que $(A \neq B)$ et $(C \neq D)$, on a :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

5.1.5 Colinéarité et orthogonalité

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires alors :
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$ ou $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \pi$
On en déduit que $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = 0$ ou $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \pi$

Conclusion : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux alors :
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2}$ ou $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = -\frac{\pi}{2}$
On en déduit que $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$ ou $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$

Conclusion :
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un imaginaire pur

5.1.6 Barycentre

Reportez vous au chapitre sur le barycentre de 1re S pour en savoir davantage sur les barycentres.

Théorème 8 : Soit G le barycentre du système des n points pondérés suivant : $(A_1(z_1), \alpha_1)$, $(A_2(z_2), \alpha_2)$, …, $(A_n(z_n), \alpha_n)$.
L'affixe z_G du point G vérifie :

$$z_G = \frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \cdots + \alpha_n z_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}$$

5.2 Complexe et transformation

5.2.1 Définition

Définition 7 : Une transformation plane T est une bijection du plan dans lui-même.

$$T : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$$
$$M \mapsto M' = T(M)$$

Remarque : Comme une transformation est une bijection, à toute transfomation T il existe une transformation réciproque T^{-1}.

Définition 8 : On appelle écriture complexe d'une transformation, la fonction bijective complexe qui à l'affixe z de M associe l'affixe z' de M' :

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto z' = f(z)$$

Exemple : Soit la tranformation d'écriture complexe : $z' = (2+3i)z + 1 - i$

Remarque : On s'intéressera dans une transformation aux points fixes ($M' = M$) et aux images de droites ou de cercles

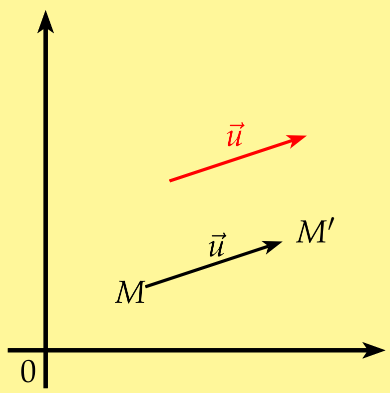
5.2.2 Écriture complexe d'une translation

Théorème 9 : Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$, on a alors :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

Si $M(z)$, $M'(z')$ et $\vec{u}(b)$, l'écriture complexe de la translation est donc :

$$z' = z + b$$



Remarque : La translation n'a pas de point fixe.

Exemples :

1) Soit le vecteur $\vec{w} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Déterminer l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{w}$.

   On a alors $\vec{w}\,(-2+3i)$ on obtient alors l'écriture complexe suivante :

$$z' = z - 2 + 3i$$

2) Déterminer l'écriture complexe de la translation qui transforme $A(1-i)$ en $B(3+2i)$.
On a alors $z_{\overrightarrow{AB}} = 3+2i-1+i = 2+3i$. On obtient alors l'écriture complexe :

$$z' = z + 2 + 3i$$

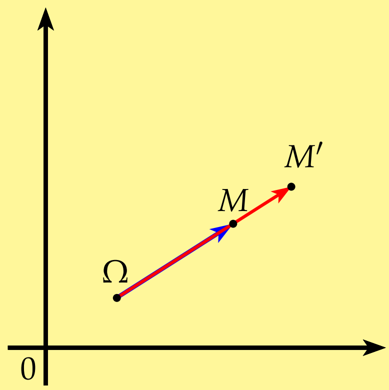
5.2.3 Écriture complexe d'une homothétie

Théorème 10 : Soit $h_{\Omega,k}$ l'homothétie de centre Ω et de rapport non nul k. On a alors :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$

Si $M(z)$, $M(z')$ et $\Omega(\omega)$, on a alors :

$$z' - \omega = k(z-\omega)$$



Remarque : L'homothétie possède un point fixe : son centre.

Si $k=-1$ l'homothéte est alors la symétrie de centre Ω

Si $|k|>1$ correspond à un agrandissement
Si $|k|<1$ corrzespond à une réduction

Exemple : h est l'homothétie de centre O qui tranforme A en B.

On donne $A(2-2i)$ et $B(-3+3i)$. Déterminer l'écriture complexe de h.

On a alors $z' = kz$ donc $k = \dfrac{-3+3i}{2-2i} = \dfrac{-3(1-i)}{2(1-i)} = -\dfrac{3}{2}$

L'écriture complexe est alors :

$$z' = -\frac{3}{2}z$$

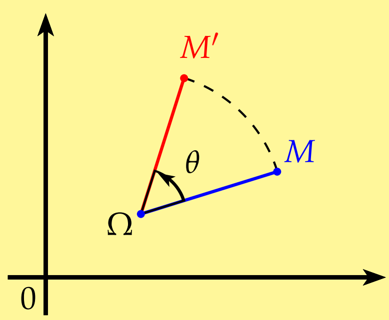
5.2.4 Écriture complexe d'une rotation

Théorème 11 : Soit $r_{\Omega,\theta}$ est la rotation de centre Ω et d'angle θ. On a alors :

$$\Omega M' = \Omega M \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$$

Si $M(z)$, $M'(z')$ et $\Omega(\omega)$, on a alors :

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z-\omega)$$



Remarque : La rotation possède un point fixe : son centre.
Lorsque $\theta = \pi$ la rotation est alors la symétrie de centre Ω.

Lorsque $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ ou $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$ la rotation est alors un quart de tour direct dans le premier cas et indirect dans l'autre.

Exemple : Déterminer l'écriture complexe d'un quart de tour direct de centre $\Omega(1+2i)$.

On a alors :

$$\begin{aligned} z' - (1+2i) &= e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 1 - 2i) \\ z' &= iz - i + 2 + 1 + 2i \\ z' &= iz + 3 + i \end{aligned}$$

5.3 Étude d'une transformation quelconque

Soit un exemple de transformation quelconque à l'aide du sujet de la Réunion de juin 2004.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$;
Soient les points A, B et C d'affixes respectives i, $1+i$ et $-1+i$.
Soit f l'application qui, à tout point M du plan différent de A, d'affixe z, associe le point M' du plan d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{\mathrm{i}z + 2}{z - \mathrm{i}}$$

1) a) Déterminer les images de B et de C par l'application f.
   b) Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de i, on a la relation :

$$(z' - \mathrm{i})(z - \mathrm{i}) = 1$$

   c) Soit D le point d'affixe $1+2i$. Placer les points A, B, C et D sur une figure (unité graphique 4 cm).
   Déduire de la question précèdente une construction du point D' image du point D par l' application f.
2) Soit R un nombre réel strictement positif.
   Quelle est l'image par l'application f du cercle de centre A et de rayon R ?
3) a) Montrer que, si l'affixe du point M est un imaginaire pur différent de i, alors l'affixe du point M' est un imaginaire pur. Que signifie ce résultat pour l'image par l'application f de l'axe imaginaire privé du point A ?
   b) Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Déterminer l' image de la droite $\mathscr{D}$ privée du point A par l'application f.

⇒ ⇒ ⇒ ⇒ ⇒ ⇒ ⇒ ⇒ ⇒ ⇒ ⇒ ⇒ ⇒ ⇒ ⇒ ⇒ ⇒ ⇒ ⇒

1) a) Image de B : $z_{B'} = \dfrac{i - 1 + 2}{1 + i - i} = 1 + i = z_B$.
   Le point B est donc invariant par f.

   Image de C : $z_{C'} = \dfrac{i(-1+i) + 2}{-1 + i - i} = -1 + i = z_C$.
   Le point C est donc invariant par f.

b) Soit M d'affixe différente de i et M' son image par f, alors :

$$z' - i = \frac{iz+2}{z-i} - i = \frac{iz+2-iz-1}{z-i} = \frac{1}{z-i}$$

d'où $(z'-i)(z-i) = 1$.

c) Soit D′ l'image de D$(1+2i)$ par f. On déduit de la question précédente que :

$$(z_{D'} - i)(1+i) = 1$$

ce qui signifie :

➪ en module que : $\text{AD}' \times \text{OB} = 1$, soit $\text{AD}' = \dfrac{1}{\text{OB}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

➪ en argument que : $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{AD}'}\right) + \dfrac{\pi}{4} = 0 \quad [2\pi]$ soit

$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{AD}'}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$, soit puisque $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\text{AB}}$

$\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}'}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$.

On peut donc construire l'image D_1 de D par la réflexion d'axe (AB). D' se trouve alors à l'intersection des diagonales du carré ABD_1O. D'où la figure :

2) Si M est sur le cercle de centre A et de rayon R, on a : $AM = R$

or la relation établie à la question 1b), donne en module :

$$AM' \times AM = 1$$
$$AM' = \frac{1}{R}$$

Donc M′ est sur le cercle de centre A et de rayon $\dfrac{1}{R}$. De plus si l'on prend la relation en argument, on a :

$$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{AM}'}\right) + \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{AM}}\right) = 0 \quad [2\pi]$$
$$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{AM}'}\right) = -\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{AM}}\right) \quad [2\pi]$$

Si l'angle : $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{AM}}\right)$ varie dans $[0, 2\pi]$ alors l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{AM}'}\right)$ varie dans $[0, 2\pi]$.

Conclusion : l'image par f du cercle de centre A et de rayon R est le cercle de centre A et de rayon $\dfrac{1}{R}$.

3) a) Si z est un imaginaire pur alors on peut écrire : $z = i\alpha$ avec $\alpha \neq 1$. En remplaçant dans l'écriture complexe de f, on a :

$$z' = \frac{i(i\alpha)+2}{i\alpha - i} = \frac{-\alpha+2}{i(\alpha-1} = \frac{\alpha-2}{\alpha-1}i$$

Donc z' est un imaginaire pur.

Inversement on peut montrer que si z' est un imaginaire pur alors z aussi. (l'expression en 1b) est symétrique.

Conclusion l'image par f de l'axe des ordonnées privé de A est l'axe des ordonnées privé de A.

b) Si M est un point de $\mathscr{D}$ privé de A alors son affixe z est de la forme : $z = \alpha + i$ ($\alpha \neq 0$). En appliquant la relation du 1b), on obtient :

$$(z' - i) = \frac{1}{\alpha + i - i} \Leftrightarrow z' = \frac{1}{\alpha} + i$$

Donc M' est sur la droite $\mathscr{D}$ privé de A

Réciproquement si le point M' se trouve sur la droite $\mathscr{D}$ privé de A, on a $z' = \alpha + i$ ($\alpha \neq 0$), on obtient alors $z = \dfrac{1}{\alpha} + i$. Donc M est aussi sur la droite $\mathscr{D}$ privé de A.

Conclusion : l'image par f de la droite $\mathscr{D}$ privé de A est la droite $\mathscr{D}$ privé de A.