Exercices
Limites de suites

Exercice 1

Limite d'une suite

Dans les exercices suivants, déterminer la limite de la suite (u_n) en précisant le théorème utilisé.

1) $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^n} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$

2) $u_n = \dfrac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$

3) $u_n = n + 1 - \cos n$

4) $u_n = \sqrt{\dfrac{4n-3}{n+1}}$

5) $u_n = \cos\left(\dfrac{2n\pi}{3n+1}\right)$

6) $u_n = \dfrac{e^n - 1}{2e^n + 3}$

7) $u_n = e^{-n}$

8) $u_n = \ln(2 + e^{-n})$

9) $u_n = \dfrac{3n^2 - 4}{n+1} - 3n$

10) (u_n) et (v_n) sont les suites définies par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n - 2 \end{cases}$ et $v_n = u_n + 3$

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) Calculer v_n puis u_n en fonction de n

On note $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

c) Calculer S_n et S'_n en fonction de n.

d) En déduire les limites des suites (S_n) et (S'_n)

Exercice 2

Monotonie et convergence

1) (u_n) et (v_n) sont les suites définies par : $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$

a) Prouver que 1 est un majorant de u_n

b) Prouver que pour $n \geqslant 1$, on a $u_n < v_n$

c) De ces deux renseignements, lequel est le plus intéressant ?

2) Pour les exercices suivants, préciser si la suite (u_n) est majorée, minorée, bornée.

a) $u_n = \sin n$

b) $u_n = \dfrac{1}{1+n^2}$

c) $u_n = 2^n$

d) $u_n = n + \cos n$

e) $u_n = (-1)^n \times n^2$

3) La suite u_n est définie pour $n \geqslant 4$ par : $u_n = \dfrac{1}{n^2 - 5n + 6}$

Prouver que la suite (u_n) est majorée par $\dfrac{1}{2}$. On pourra étudier la fonction associée.

4) Répondre par vrai ou faux aux propositions suivantes en justifiant votre réponse.
   a) Si un suite n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$
   b) Si une suite est croissante alors elle tend vers $+\infty$
   c) Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle n'est pas majorée.
   d) Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle est croissante.

Exercice 3

Convergence

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$

1) Visualiser la suite sur votre calculatrice. On prendra : $X_{min} = 0$, $X_{max} = 2$, $Y_{min} = 0$, $Y_{max} = 2$
2) Démontrer, par récurrence, que pour tout n : $1 \leqslant u_n \leqslant 2$
3) a) Démontrer que pour tout n : $u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$
   b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
4) Est-elle convergente ?

Exercice 4

Bac

Soit al suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$

1) a) Prouver que (u_n) est majorée par 4.
   b) Prouver que (u_n) est strictement croissante.
   c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite
2) a) Prouver que pour tout n on a : $4 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(4 - u_n)$
   b) retrouver le résultat du 1c)
   c) Etudier la convergence de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = n^2(4 - u_n)$

Exercice 5

Limite par comparaison

La suite (u_n) est définie pour $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$$

1) Démontrer que pour $n \geqslant 1$: $\dfrac{n^2}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n^2}{n^2+1}$
2) En déduire la convergence de la suite (u_n). Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Exercice 6

Suite homographique

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

1) Démontrer par récurrence que :

   a) pour tout n, $u_n \geqslant 0$

   b) Pour tout n : $u_n < 1$

2) Démontrer que la suite u_n est monotone et convergente.

3) La suite (v_n) est définie pour tout entier n par : $\dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

   Démontrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser la raison et le premier terme.

4) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n et trouver $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n$.

5) Trouver un entier N tel que, pour tout $n \geqslant N$: $u_n > 0,99$

Exercice 7

Suite et fonction continue

u_n) est la suite définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.

2) Prouver que la suite u_n est croissante et majorée par 3. Que peut-on en déduire ?

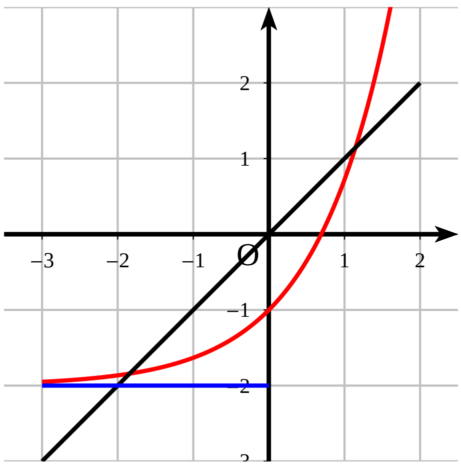
3) Quelle est la limite de (u_n) ? Justifier la réponse

Exercice 8

Détermination d'une limite

On a tracé ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f définie dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - 2$, ainsi que la droite d'équation y_x

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.



1) Visualiser cette suite sur votre calculatrice. Quelle conjecture peut-on faire sur les variations et la convergence de la suite ?

2) Prouver à l'aide d'une raisonnement par récurrence et les variation de f que

   a) la suite (u_n) est décroissante

   b) et que pour tout n, on a : $-2 \leqslant u_n \leqslant 0$. En déduire la convergence de la suite.

3) Détermination de la limites de (u_n).

   a) Démontrer que l'équation $f(x) = x$ a deux solutions et deux seulement dans $\mathbb{R}$. On pourra étudier la fonction φ définie par : $\varphi(x) = f(x) - x$

   b) Exploiter la question précédente pour trouver un encadrement de ℓ à l'amplitude 10^{-3}

Exercice 9

Suites adjacentes

1) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) définie par : $u_n = \dfrac{n-1}{n}$ et $v_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$ sont adjacentes puis trouver leur limite commune.

2) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) définie par : $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$ sont adjacentes. Programmer sur votre calculatrice ces deux suites. Donner alors une approximation de leur limite à 10^{-2}.

3) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) définie par : $u_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$ sont adjacentes. Programmer sur votre calculatrice ces deux suites. Donner alors une approximation de leur limite à 10^{-2}.

4) (u_n) et (v_n) sont deux suites définies par $u_0 = 0$, et $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4}$$

   a) Démontrer par récurrence que : $u_n \leqslant 1 \leqslant v_n$

   b) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et trouver leur limite commune.

Exercice 10

Bac

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

1) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;2]$. Montrer que si $x \in [1\,;\,2]$ alors $f(x) \in [1\,;\,2]$.

2) (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
$v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$.

   a) Construire la fonction f sur l'intervalle $[0\,;2]$.
   Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n) en laissant apparents tous les traits de construction.
   À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (u_n) et (v_n) ?

   b) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :
   Pour tout entier naturel n, $1 \leqslant v_n \leqslant 2$.
   Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} \leqslant v_n$.
   On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :
   Pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
   Pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

   c) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.
   En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \geqslant 0$ et $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{4}(v_n - u_n)$.

d) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

e) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel α.
Déterminer la valeur exacte de α.

Exercice 11

Nouvelle-Calédonie 2005

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0$; $v_0 = 12$;

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

1) Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique convergente et que tous ses termes sont positifs.
2) Montrer que la suite (u_n) est croissante puis que la suite (v_n) est décroissante.
3) Déduire des deux questions précédentes que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.
4) On considère la suite (t_n) définie par $t_n = 2u_n + 3v_n$. Montrer qu'elle est constante. En déduire la limte des suite (u_n) et $v_n)$.

Exercice 12

Nouvelle-Calédonie décembre 2004

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

1) Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2.
2) Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = v_n - u_n$.
   a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.
   b) Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n).
3) Après avoir étudié le sens de variation de suites (u_n) et (v_n), démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
4) On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.
   a) Démontrer que la suite (t_n) est constante.
   b) En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

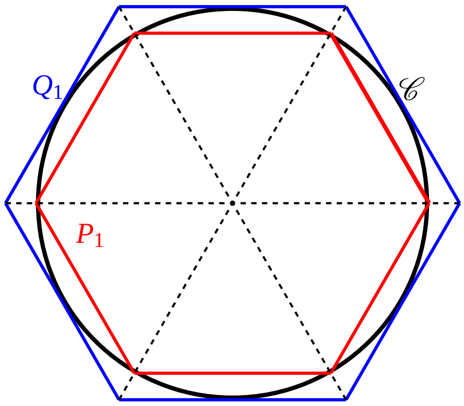
Exercice 13

La méthode d'Archimède

Dans un texte intitulé « De la mesure du cercle », Archimède imagine la première méthode jamais proposée permettant, en théorie, le calcul de π avec une précision aussi grande qu'on le souhaite. Ce problème suit les idées d'Archimède avec des méthodes modernes.

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de rayon 1 : on construit, pour tout $n \geqslant 1$ deux polygones réguliers P_n, et Q_n , ayant 3×2^n côtés, P_n étant inscrit dans $\mathscr{C}$, et Q_n, exinscrit à $\mathscr{C}$ (voir la figure ci-contre).

Nous admettons que le périmètre du cercle (égal à 2π) est encadré par ceux des deux polygones. Dans la suite, on note p_n et q_n, les demi-périmètres respectifs de P_n et Q_n. Ainsi, $p_n < \pi < q_n$



$n = 1$ (6 côtés)

1) Le cas $n = 1$
   Montrer que $p_1 = 3$ et $q_1 = 2\sqrt{3}$.

2) Expression de p_n, et q_n

   a) Évaluer, en fonction de n, l'angle au centre qui intercepte l'un des côtés de P_n ou de Q_n.

   b) En déduire les relations : $p_n = 3 \times 2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$ et $q_n = 3 \times 2^n \tan\left(\dfrac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$

   En pratique, ces expressions ne permettent pas un calcul numérique de p_n, et q_n. Dans la suite, nous nous orientons vers un calcul de proche en proche.

3) Relations de récurrence

   a) On pose $\alpha = \dfrac{\pi}{3 \times 2^{n+1}}$. Exprimer p_n, et q_n, en fonction de n et α.

   b) Exprimer $\sin(2\alpha)$ et $1 + \cos(2\alpha)$ en fonction de $sin\alpha$ et $\cos\alpha$.

   c) En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$: $\dfrac{1}{q_{n+1}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p_n} + \dfrac{1}{q_n}\right)$ et $p_{n+1} = \sqrt{p_n q_{n+1}}$

   d) Calculer q_2, et p_2 à l'aide des relations précédentes.

4) Étude des suites (p_n) et (q_n)

   a) Soit a et b deux réels vérifiant $0 \leqslant a \leqslant b$.
   Démontrer les relations : $a < \sqrt{ab} < b$ (i) et $a < \dfrac{2ab}{a+b} < \dfrac{a+b}{2} < b$ (ii)

   b) Montrer par récurrence que $p_n < q_n$.

   c) En déduire que la suite (p_n) est croissante et que (q_n) est décroissante.

   d) Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$: $q_{n+1} - p_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(q_n - p_n)$. (On pourra utiliser (i) et (ii) à bon escient.)
   En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $q_n - p_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ puis que les suites (p_n) et (q_n) sont adjacentes.

   e) Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n$?

5) À l'aide d'une calculatrice, calculer les valeurs de p_n et q_n jusqu'à obtenir un encadrement de n d'amplitude 10^{-10}.

Exercice 14

Antille-Guyane juin 2005

1) Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[0\,;\,1]$:

$$\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \leqslant \frac{1}{x+n} \leqslant \frac{1}{n}.$$

2) a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+n}\,\mathrm{d}x$.

b) Déduire en utilisant **1.**, que :

$$\text{pour } n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \quad (1)$$

$$\text{puis que} \quad \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}.$$

3) On appelle U la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$U(n) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

Démontrer que U est décroissante (on pourra utiliser **2. b.**.)

4) On désigne par V la suite de terme général :

$$V(n) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1).$$

Démontrer que V est croissante.

5) Démontrer que U et V convergent vers une limite commune notée γ.
Déterminer une valeur approchée de γ à 10^{-2} près par la méthode de votre choix.