Correction bonus

du lundi 6 février 2012

Exercice 1

La méthode d'Archimède

1) Le cas $n = 1$
   Le cercle est donc encadré par deux hexagones (figure).

➪ Pour P_1 : L'hexagone est constitué de 6 triangles équilatéraux isométriques dont le côté vaut le rayon du cercle soit 1. Le demi-périmètre p_1 vaut donc :

$$p_1 = 3 \times 1 = 3$$

➪ Pour Q_1 : L'hexagone est constitué de 6 triangles équilatéraux isométriques dont la hauteur, issue du centre du cercle (qui est confondue avec la bissectrice), vaut le rayon du cercle soit 1. Si c est la longueur du côté de ces triangles équilatéraux, on a alors :

$$\frac{c\sqrt{3}}{2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{donc} \quad q_1 = 3 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

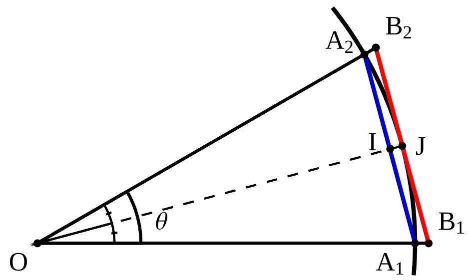
On a alors l'encadrement : $3 < \pi < 2\sqrt{3}$

2) Expression de p_n, et q_n

   a) Si le polygone inscrit et exinscrit possède 3×2^n côtés, l'angle au centre θ vaut donc :

$$\theta = \frac{2\pi}{3 \times 2^n} = \frac{\pi}{3 \times 2^{n-1}}$$

   b) On peut faire la figure suivante, pour exprimer le côté des polygone :



Si $[A_1A_2]$ est un côté du polygone P_n, le triangle OA_1A_2 est isocèle. Si I est le milieu du segment $[A_1A_2]$, la droite (OI) représente la bissectrice de l'angle $\widehat{A_1OA_2}$ ainsi que la hauteur issue de O. On a donc :

$$\widehat{IOA_1} = \frac{1}{2}\theta = \frac{\pi}{3 \times 2^n}$$

On a donc : $IA_1 = OA_1 \times \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$

donc $A_1A_2 = 2\sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$

Le demi-périmètre ($3 \times 2^{n-1}$ côtés) vaut donc :

$$p_n = 3 \times 2^{n-1} \times 2\sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) = 3 \times 2^n \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$$

Si $[B_1B_2]$ est un côté du polygone Q_n, le triangle OB_1B_2 est isocèle. Si J est le milieu du segment $[B_1B_2]$, la droite (OJ) représente la bissectrice de l'angle $\widehat{B_1OB_2}$ ainsi que la hauteur issue de O. On a donc :

$$\widehat{JOB_1} = \frac{1}{2}\theta = \frac{\pi}{3 \times 2^n}$$

On a donc avec OJ = 1 : $JB_1 = OJ \times \tan\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$

donc $B_1B_2 = 2\tan\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$

Le demi-périmètre ($3 \times 2^{n-1}$ côtés) vaut donc :

$$q_n = 3 \times 2^{n-1} \times 2\tan\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) = 3 \times 2^n \tan\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$$

En pratique, ces expressions ne permettent pas un calcul numérique de p_n, et q_n. Dans la suite, nous nous orientons vers un calcul de proche en proche.

3) Relations de récurrence

a) On a : $p_n = 3 \times 2^n \sin(2\alpha)$ et $q_n = 3 \times 2^n \tan(2\alpha)$

b) On a : $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$ et $1 + \cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha$

c) Pour q_n, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n}\right) &= \frac{1}{3 \times 2^{n+1}}\left(\frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\tan 2\alpha}\right)\\
&= \frac{1}{3 \times 2^{n+1}}\left(\frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\right)\\
&= \frac{1}{3 \times 2^{n+1}}\left(\frac{2\cos^2\alpha}{2\cos\alpha\sin\alpha}\right)\\
&= \frac{1}{3 \times 2^{n+1}}\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\\
&= \frac{1}{3 \times 2^{n+1}}\left(\frac{1}{\tan\alpha}\right) = \frac{1}{q_{n+1}}
\end{aligned}$$

Pour p_n :

$$\begin{aligned}
\sqrt{p_n q_{n+1}} &= \sqrt{3 \times 2^n \sin 2\alpha \times 3 \times 2^{n+1} \tan\alpha}\\
&= \sqrt{(3 \times 2^n)^2 \times 2\sin 2\alpha \tan\alpha}\\
&= \sqrt{(3 \times 2^n)^2 \times 4\sin\alpha\cos\alpha \times \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}\\
&= \sqrt{(3 \times 2^n)^2 \times 4\sin^2\alpha}\\
&= 3 \times 2^{n+1}\sin\alpha = p_{n+1}
\end{aligned}$$

d) On obtient alors :

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1}\right) = \frac{1}{1}\left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{12 + \sqrt{3}}{12}$$

On obtient alors : $q_2 = \dfrac{12}{2 + \sqrt{3}} = 12(2 - \sqrt{3}) \simeq 3,21$

$$p_2 = \sqrt{p_1 q_2} = \sqrt{3 \times 12(2 - \sqrt{3})} = 6\sqrt{2 - \sqrt{3}} \simeq 3,105$$

4) Étude des suites (p_n) et (q_n)

a) Comme $0 \leqslant a \leqslant b$, on a alors : $a^2 \leqslant ab \leqslant b^2$, comme la fonction racine est une fonction croissante, on a donc les inégalités : $a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b$

Comme $0 \leqslant a \leqslant b$, on a :

$$a + b \leqslant 2a \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a+b} \geqslant \frac{1}{2a} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2a^2}{a+b} \geqslant a \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2ab}{a+b} \geqslant a$$

$$\frac{2ab}{a+b} = \frac{[(a+b)^2 - (a-b)^2]}{2(a+b)} \leqslant \frac{(a+b)^2}{2(a+b)} \quad \text{or} \quad \frac{(a+b)^2}{2(a+b)} = \frac{a+b}{2} \leqslant b$$

b) Montrons que $p_n < q_n$ par récurrence :

Initialisation : pour $n = 1$ immédiat $p_1 < q_1$

Hérédité : On suppose que $0 \leqslant p_n \leqslant q_n$

On a $\dfrac{1}{q_{n+1}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p_n} + \dfrac{1}{q_n}\right)$ donc $q_n = \dfrac{2p_nq_n}{p_n + q_n}$

Calculons alors :

$$\begin{aligned}
q_{n+1}^2 - p_{n+1}^2 &= \frac{4p_n^2q_n^2}{(p_n+q_n)^2} - p_n \times \frac{2p_nq_n}{p_n+q_n} \\
&= \frac{4p_n^2q_n^2 - 2p_n^2q_n(p_n+q_n)}{(p_n+q_n)^2} \\
&= \frac{4p_n^2q_n^2 - 2p_n^3q_n - 2p_n^2q_n^2}{(p_n+q_n)^2} \\
&= \frac{2p_n^2q_n^2 - 2p_n^3q_n}{(p_n+q_n)^2} \\
&= \frac{2p_n^2q_n(q_n - p_n)}{(p_n+q_n)^2}
\end{aligned}$$

Comme $0 < p_n < q_n$ on en déduit que $q_{n+1}^2 - p_{n+1}^2 > 0$ et comme les termes sont positifs, on a : $q_{n+1} > p_{n+1}$

Par initilalisation et hérédité, on a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad p_n < q_n$

c) On a alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < p_n < q_n$, donc

$$q_{n+1} = \frac{2p_nq_n}{p_n + q_n} < q_n \quad \text{car} \quad \frac{2ab}{a+b} < b$$

La suite (q_n) est donc décroissante.

$$p_{n+1} = \sqrt{p_n q_{n+1}} = \sqrt{p_n \frac{2p_n q_n}{p_n + q_n}} > \sqrt{p_n^2}(= p_n) \quad \text{car} \quad a < \frac{2ab}{a+b}$$

La suite (p_n) est donc croissante.

d) On a :

$$\begin{aligned} q_{n+1} - p_{n+1} &= \frac{2p_n q_n}{p_n + q_n} - \sqrt{p_n q_{n+1}} \\ &\leqslant \frac{p_n + q_n}{2} - p_n \qquad \text{car} \quad \frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2} \text{ et } \sqrt{ab} \geqslant a \\ &\leqslant \frac{q_n - p_n}{2} \end{aligned}$$

On a donc : $q_n - p_n \leqslant \frac{1}{2}(q_{n-1} - p_{n-1})$, donc de proche en proche, on obtient :

$$q_n - p_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (q_1 - p_1)$$

or $q_1 - p_1 = 2\sqrt{3} - 3 < 0,5$, on a donc $0 \leqslant q_n - p_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$

On en déduit alors par le théorème des gendarmes que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (q_n - p_n) = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $-1 < \frac{1}{2} < 1$

Les suites (p_n) et (q_n) sont respectivement croissante et décroissante et la différence de leurs termes tend vers 0, les suites (p_n) et (q_n) sont donc adjacentes et tendent alors vers une même limite.

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty} q_n = \pi$

5) On programme les suites (p_n) et (q_n) sur la calculatrice. On obtient le tableau suivant :

n	2	10	17
p_n	$3,105$	3,141 592 1	3,141 592 653 7
q_n	$3,215$	3,141 593 4	3,141 592 653 8
$q_n - p_n$	10^{-1}	2×10^{-6}	10^{-10}