Géométrie dans l'espace

Table des matières

1 Rappels sur les vecteurs

1.1 Définition

Le calcul vectoriel reste identique entre la géométrie plane et la géométrie dans l'espace. On retrouve pareillement :

- La relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- La construction de la somme de deux vecteurs de même origine par un parallélogramme.
- Le produit d'un vecteur par un scalaire,
- La colinéarité : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaire $\Leftrightarrow$ $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$
- L'orthogonalité,
- Le produit scalaire
- Le barycentre
- ...

Pour la géométrie analytique, on travaille dans un repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$, orthonormal direct. Il suffit donc de rajouter une coordonnée au vecteur. Cette dernière coordonnée s'appelle la « cote »

- La norme du vecteur $\overrightarrow{u}\,(a,b,c)$ vaut : $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$
- Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$: coordonnées de B − les coordonnées de A
- La distance $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$
- Les coordonnées du milieu de deux points est la demi somme des coordonnées des deux points

Dans l'espace le théorème de Pythagore et de Thalès restent bien naturellement valide.

1.2 Propriétés

Propriété 1 : Pour montrer que :

- trois points A, B et C sont alignés, il faut montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Leurs coordonnées doivent être proportionnelles :

$$\exists k \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$$

- quatre points A, B, C et D sont coplanaires, il faut montrer que tout vecteur formé par deux points peut s'exprimer à l'aide de deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\exists k,\ \exists k' \quad \overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB} + k'\overrightarrow{AC}$$

Exemple : Soient quatre points $A(2;0;1)$, $B(1;-2;1)$, $C(5;5;0)$, $D(-3;-5;6)$.

1) Montrer que A,B et C ne sont pas alignés.

2) Montrer que A, B, C et D sont coplanaires.

✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏

1) Les points A,B et C ne sont pas alignés,si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

$$\overrightarrow{AB} = (-1;-2;0) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = (3;5;-1)$$

Manifestement les coordonnées ne sont pas proportionnelles, par exemple en observant la troisième coordonnée des deux vecteur.(0 n'est pas en rapport avec 1)

Les vecteurs ne sont pas colinéaires, les points A, B et C ne sont pas alignés

Remarque : Contrairement à la géométrie plane, on ne peut calculer le déterminant pour tester la colinéarité

2) Les point A, B, C et D sont coplanaires si, et seulement si, on peut exprimer $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

il faut donc déterminer k et k' telles que : $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB} + k'\overrightarrow{AC}$.

On a $\overrightarrow{AD} = (-5;-5;5)$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -k + 3k' = -5 \\ -2k + 5k' = -5 \\ -k' = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k' = -5 \\ -k - 15 = -5 \\ -2k - 25 = -5 \end{cases}$$

on obtient alors $k = -10$ et $k' = -5$.

Les points A, B, C et D sont coplanaires

Remarque : pour déterminer k et k', il faut résoudre un système à trois équations à deux inconnues. Une équation peut alors être incompatible avec les deux autres. Les coefficient k et k' n'existe alors pas. Les points sont alors non coplanaires

2 Le produit scalaire dans l'espace

2.1 Définition

Note : Le terme « scalaire » est employé pour désigner un nombre par opposition au mot vecteur.

Définition 1 : Le produit scalaire dans l'espace se définit de la même façon que dans le plan. Les trois définitions suivantes sont équivalentes et la deuxième demande un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \overrightarrow{k})$.

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';k')$, le nombre réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ tel que :

1) Identité remarquable appliquée au produit scalaire

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$$

2) Calcul en géométrie analytique

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

On peut aussi utiliser la notation matricielle :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'$$

3) Utilisation de l'angle entre les deux vecteurs

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Démonstration : La démonstration de l'équivalence de ces trois définitions est identique à la démonstration dans le plan. Je vous renvoie donc au chapitre de 1^{re} S sur le produit scalaire.

Par convention : On écrira $\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^2$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2$.

Remarque : Pour la 3^{e} définition, on pourra considérer l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$, comme un angle géométrique (de 0°à 180°), car la fonction cos est paire. Cela explique d'ailleurs la commutativité du produit scalaire. Le signe du produit scalaire est celui du $\cos(\vec{u}, \vec{v})$

- ➪ Si $(\vec{u}, \vec{v}) < 90°$ $\quad\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$
- ➪ Si $(\vec{u}, \vec{v}) = 90°$ $\quad\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$
- ➪ Si $(\vec{u}, \vec{v}) > 90°$ $\quad\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$

Exemple : Les points A, B et C ont pour coordonnées respective : $A(6;8;2)$, $B(4;9;1)$ et $C(5;7;3)$

1) Déterminez la mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.

2) Les points A, B et C se projettent orthogonalement respectivement en A', B' et C' sur le plan $(0; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (d'équation $z = 0$).

   a) Déterminez les coordonnées des points A', B' et C'.

   b) Déterminez la mesure de l'angle géométrique $\widehat{B'A'C'}$. Que constatez-vous ?

✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏

1) Pour calculer l'angle $\widehat{BAC}$ utilisons la 3[e] définition du produit scalaire. On a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\widehat{BAC}) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC}$$

Pour calculer le produit scalaire et les distances AB et AC, on utilise la définition analytique :

$$\overrightarrow{AB} = (4-6; 9-8; 1-2) = (-2; 1; -1)$$
$$\overrightarrow{AC} = (5-6; 7-8; 3-2) = (-1; -1; 1)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-2) \times (-1) + 1 \times (-1) + (-1) \times 1 = 0$$

$$AB = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6} \quad \text{et} \quad AC = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

on obtient alors : $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{0}{\sqrt{18}} = 0$

Conclusion : $\widehat{BAC} = 90°$. Le triangle ABC est rectangle en A

2) a) Pour trouver les coordonnées des points A', B' et C' projection orthogonale surle plan $(0; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on annule la troisième coordonnée. On obtient alors :

$$A'(6; 8; 0), \quad B'(4; 9; 0) \quad \text{et} \quad C(5; 7; 3)$$

b) Comme pour le 1), on a :

$$\cos(\widehat{B'A'C'}) = \frac{\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'}}{A'B' \cdot A'C'}$$

On calcule alors :

$$\overrightarrow{A'B'} = (-2; 1; 0) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{A'C'} = (-1; -1; 0)$$

$$\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = (-2) \times (-1) + 1 \times (-1) + 0 \times 0 = 1$$

$$A'B' = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5} \quad \text{et} \quad A'C' = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$$

on obtient alors : $\cos(\widehat{B'A'C'}) = \dfrac{1}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$

Conclusion : $\widehat{B'A'C'} \simeq 71,5°$. Le triangle $A'B'C'$ n'est rectangle en B'. La projection orthogonale d'un triangle rectangle n'est pas nécessairement un triangle rectangle. La projection orthogonale ne conserve pas les angles géométriques.

2.2 Propriétés et orthogonalité dans l'espace

Note : Dans l'espace, on réserve le terme de perpendiculaire à deux droites sécantes en angle droit. Dans les autres cas, on utilise le terme orthogonal, pour deux vecteurs, deux droites non sécantes dont les vecteurs directeurs sont orthogonaux, pour une droite et un plan ou de deux plans.

Propriété 2 : Dans l'espace, nous retrouvons les mêmes propriétés que dans le plan. Nous nous en remettons au lecteur pour montrer les propriétés suivantes :

1) Le produit scalaire est commutatif :
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

2) Le produit scalaire est distributif (bilinéarité) par rapport à l'addition de deux vecteurs :
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

3) Le produit scalaire est distributif (bilinéarité) par rapport à la multiplication par un scalaire :
$$(a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = ab \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Propriété 3 : Nous nous en remettons au lecteur pour montrer les propriétés suivantes :

1) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens si, et seulement si :
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$$

2) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires si, et seulement si :
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$$

3) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si :
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Remarque : Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Exemples :

1) Déterminer le réel α pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux :
$$\vec{u}\left(2\,;-\frac{1}{2}\,;5\right) \qquad \text{et} \qquad \vec{v}\left(-\frac{2}{5}\,;3\,;\alpha\right)$$

2) Les points A et B ont pour coordonnées respectives $A(2;-5;1)$ et $B(0;2;6)$. Démontrer que la droite d qui pasea par le point $C(-2;3;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = -4\overrightarrow{\imath} + \vec{\jmath} - 3\vec{k}$ est orthogonale à la droite (AB)

3) Les points A, B, C, D et E ont pour coordonnées $A(2;0;2)$, $B(4;0;0)$, $C(1;-2;1)$, $D(-1;1;0)$, $E(1;-1;2)$. Prouvez que les points A, B et C ne sont pas alignés et que le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est normal au plan (ABC).

1) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si leur produit scalaire est nul. On a donc :

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= 0 \\
2 \times -\frac{2}{5} - \frac{1}{2} \times 3 + 5\alpha &= 0 \\
-\frac{4}{5} - \frac{3}{2} + 5\alpha &= 0 \\
\alpha &= \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{2}\right) \\
\alpha &= \frac{1}{5}\left(\frac{23}{10}\right) \\
\alpha &= \frac{23}{50}
\end{aligned}$$

2) Les droites d et (AB) sont orthogonale si, et seulement si $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux. On a :

$$\begin{aligned}
&\vec{u} = (-4; 1; -3) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB} = (-2; 7; 5) \\
&\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = -4 \times (-2) + 1 \times 7 - 3 \times (5) = 8 + 7 - 15 = 0
\end{aligned}$$

On a donc $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{AB}$. Les coordonnées du points C ne servent à rien sauf à montrer que les droites sont perpendiculaires chose ici non vérifiée.

3) Les points A, B et C ne sont pas alignés si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. On a :

$$\overrightarrow{AB} = (2 : 0 - 2) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AC} = (-1; -2; -1)$$

Manifestement les coordonnées ne sont pas proportionnelles du fait des 2^{e} coordonnées (0 n'est pas en rapport avec -2). Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et donc les points A, B et C ne sont pas alignés.(ABC) forme donc un plan

Le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est orthogonal au plan (ABC) si, et seulement si, il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires au plan (ABC). On a alors :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{DE} = (2; -2 : 2) \\
&\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE} = 2 \times 2 + 0 \times (-2) - 2 \times 2 = 0 \\
&\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DE} = -1 \times 2 - 2 \times (-2) - 1 \times 2 = 0
\end{aligned}$$

Conclusion : Le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est orthogonal au plan (ABC).

3 Equation de plan

3.1 Définition

Définition 2 : Un vecteur normal à un plan, est un vecteur $\vec{n}$ non nul orthogonal à toutes droites du plan.

Propriété 4 : Soit un plan $\mathscr{P}$, A un point de $\mathscr{P}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal de $\mathscr{P}$.
Le plan $\mathscr{P}$ est l'ensemble des point M tel que : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Démonstration : On admettra cette propriété qui faudrait démontrer dans les deux sens.

Théorème 1 : L'équation cartésienne d'un plan est de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad \text{avec } a, b \text{ et } c \text{ non tous nul}$$

Le vecteur $\vec{n}(a; b; c)$ est alors un vecteur normal au plan.

Démonstration : Soit un plan $\mathscr{P}$, un point A de $\mathscr{P}$, un vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ de $\mathscr{P}$. Un point $M(x; y; z)$ du plan $\mathscr{P}$ vérifie alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} &= 0 \\ a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) &= 0 \\ ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A) &= 0 \end{aligned}$$

On pose $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$, on a alors

$$ax + by + cz + d = 0$$

Réciproquement , si on a l'équation : $ax + by + cz + d = 0$, avec a, b et c non tous nul, on peut toujours trouver un point $A(x_0; y_0; z_0)$ qui verifie l'équation $ax + by + cz + d = 0$. On a alors $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$, par exemple, si $a \neq 0$, on peut prendre $x_0 = -\dfrac{d}{a}$ et $y_0 = z_0 = 0$.

Si $M(x; y; z)$ vérifie l'équation, alors : $ax + by + cz + d = 0$, et en remplaçant $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$, on obtient alors :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Cette égalité traduit alors, en prenant $\vec{n}(a; b; c)$, la relation $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. Ce qui montre que le plan passe par M et a pour vecteur normal $\vec{n}$.

Remarque : L'équation cartésienne n'est pas unique. On peut toujours multiplier les coefficients a, b et c par un facteur k non nul.

Exemples :

1) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\vec{n}$ et passant par un point A.

$$A(\sqrt{2};-2;5) \qquad \vec{n}(2;-3;-1)$$

2) Trouver une équation cartésienne du plan $\mathscr{Q}$ parallèle au plan $\mathscr{P}$ et passant par un point A donné :

$$A(3;-1;0) \qquad \mathscr{P}\ : 2x-y+3z=0$$

3) Déterminer une équation cartésienne au plan médiateur du segment $[AB]$.

$$A(-1;1;0) \qquad B(2;1;-1)$$

✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏

1) On doit avoir pour un point M de $\mathscr{P}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} &= 0\\ 2(x-\sqrt{2})-3(y+2)-(z-5)\\ 2x-3y-z-2\sqrt{2}-6+5 &= 0\\ 2x-3y-z-1-2\sqrt{2} &= 0\end{aligned}$$

2) Si les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont parallèles, un vecteur normal de $\mathscr{P}$ est aussi un vecteur normal de $\mathscr{Q}$. D'après l'équation de $\mathscr{P}$, on peut prendre comme vecteur normal $\vec{n}(2;-1;3)$. On a alors pour un point M de $\mathscr{Q}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} &= 0\\ 2(x-3)-(y+1)+3(z-0)\\ 2x-y+3z-6-1 &= 0\\ 2x-3y-z-7 &= 0\end{aligned}$$

Conclusion : une équation du plan $\mathscr{Q}$ est : $\quad 2x-3y-z-7=0$.

3) Le plan médiateur d'un segment est le plan dont les points sont équidistants des points A et B. Il passe alors orthogonalement par le milieu du segment $[AB]$.

On détermine les coordonnées du milieu I de $[AB]$. Le plan recherché a alors pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

$$I=\left(\frac{-1+2}{2};\frac{1+1}{2};\frac{0-1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2};1;\frac{-1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AB}=(3;0,-1)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB} &= 0\\ 3\left(x-\frac{1}{2}\right)+0(y-1)-\left(z+\frac{1}{2}\right) &= 0\\ 3x-z-\frac{3}{2}-\frac{1}{2} &= 0\\ 3x-z-2 &= 0\end{aligned}$$

3.2 Exercice de BAC

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(0;\vec{\imath};\vec{\jmath},\vec{k})$. Les points A, B et C ont pour coordonnées $A(3;-2;2)$,$B(6;1;5)$, $C(6;-2;-1)$.

Partie A

1) Démontrez que le triangle ABC est un triangle rectangle.
2) Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne :

$$x+y+z-3=0$$

Prouvez que $\mathscr{P}$ est orthogonal à la droite (AB) et passe par le point A.
3) Soit $\mathscr{P}'$ le plan orthogonal à la droite (AC) et passant par le point A. Déterminez une équation cartésienne de $\mathscr{P}'$.
4) Déterminez un vecteur directeur de la droite Δ intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

Partie B

1) Soit D le point de coordonnées $(0;4;-1)$. Prouvez que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
2) Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$
3) Prouvez que l'angle $\widehat{BDC}$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$ radian.
4) a) Calculez l'aire du triangle BDC.
   b) Déduisez-en la distance du point A au plan (BDC).

✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎

Partie A

1) Montrons que le triangle ABC est rectangle en A. Pour cela calculons le produit scalaire suivant : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB}=(3;3;3) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC}=(3;0-3)$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times3+3\times0-3\times3=0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, donc le triangle ABC est rectangle en A.

Remarque : On aurait pu aussi utiliser la réciproque du théorème de Pythagore.

2) Si $\mathscr{P}$ est orthogonal à (AB), alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal de $\mathscr{P}$.

Or l'équation de $\mathscr{P}$ est : $x+y+z-3=0$ donc le vecteur $\vec{n}(1;1;1)$ est un autre vecteur normal de $\mathscr{P}$. Donc si $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$, il doit être colinéaire à $\vec{n}$. Or on sait que $\overrightarrow{AB}(3;3;3)$, on a donc : $\overrightarrow{AB}=3\vec{n}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, donc le plan $\mathscr{P}$ est orthogonal à (AB)

3) Si $\mathscr{P}'$ est orthogonal à (AC), alors $\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}'$. Comme $\mathscr{P}'$ passe par A, alors un point M quelconque de $\mathscr{P}'$ vérifie :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} &= 0 \\ 3(x-3)+0(y+2)-3(z-2) &= 0 \\ 3x-3z-3 &= 0 \\ x-z-1 &= 0 \end{aligned}$$

Conclusion : Le plan $\mathscr{P}'$ a pour équation cartésienne : $\quad x-z-1=0$

4) On cherche un vecteur directeur de l'intersection des deux plans. On obtient donc le système suivant :

$$\Delta \begin{cases} x+y+z-3=0 & (1) \\ x \qquad -z-1=0 & (2) \end{cases}$$

Si on privilégie le paramètre z, c'est à dire que l'on exprime x et y en fonction de z, on obtient :

A partir de (2) : $\quad x = z+1$

en remplaçant dans (1) : $\quad z+1+y+z-3=0 \quad$ d'où $\quad y=-2z+2$

Pour trouver un vecteur directeur de Δ, comme on sait que cette droite passe par A, il suffit de trouver un autre point de Δ, c'est à dire de donner une valeur à z. Soit en prenant $z=1$, on obtient le point $E(2;0;1)$. On obtient alors comme vecteur directeur : $\vec{u}$

$$\vec{u} = \overrightarrow{EA} = (3-2;-2-0;2-1) = (1;-2;1)$$

Partie B

1) Pour prouver que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC), il suffit de montrer que le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires au plan, soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AD} = (-3;6;-3)$

On calcule alors les produits scalaires suivants :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} &= -3\times 3+6\times 3-3\times 3 = 0 \\ \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} &= -3\times 3+6\times 0-3\times(-3) = 0 \end{aligned}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est donc orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. La droite (AD) est donc perpendiculaire au plan (ABC).

2) On rappelle le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre (plus généralement d'une pyramide) :

$$\mathcal{V} = \frac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$$

En appliquant cette formule à $ABCD$. On prend comme base le triangle ABC rectangle en A. Comme la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC), AD est la hauteur issue de D sur ABC. On a alors :

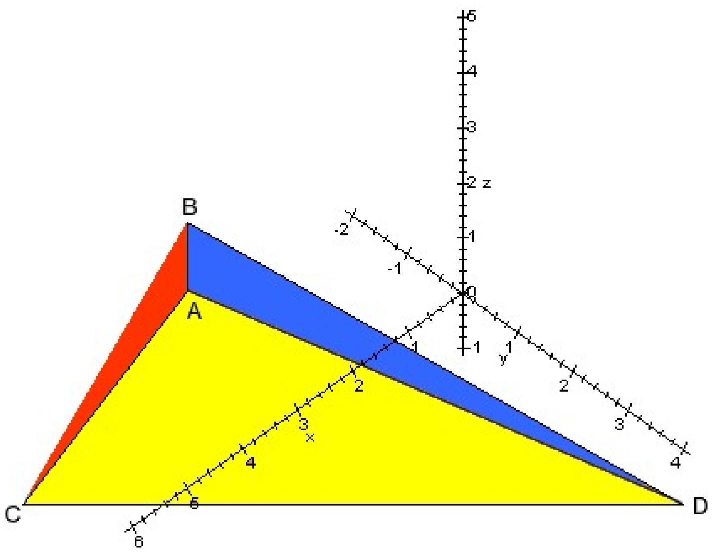
$$\mathcal{V}(ABCD) = \frac{\frac{1}{2}(AB \times AC) \times AD}{3} = \frac{(AB \times AC) \times AD}{6}$$

On calcule les différentes distances :

$$AB = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$
$$AC = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$
$$AD = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

On obtient alors : $\mathcal{V}(ABCD) = \dfrac{3\sqrt{3} \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{6}}{6} = 27$

Remarque : On peut donner une représentation de ce tétraèdre (représentation pas toujours aisé pour que cela soit clair). Voici ce que donne le logiciel « Mapple » :



3) Pour calculer l'angle $\widehat{BDC}$, on utilise la troisième définition du produit scalaire :

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = DB \times DC \times \cos(\widehat{BDC}) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\widehat{BDC}) = \frac{\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}}{DB \times DC}$$

On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$, ainsi que les distances

DB et DC :

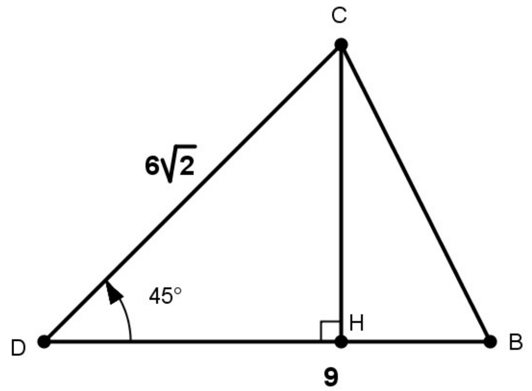
$$\overrightarrow{DB} = (6;-3;6) \qquad DB = \sqrt{6^2+(-3)^2+6^2} = \sqrt{81} = 9$$
$$\overrightarrow{DC} = (6;-6;0) \qquad DB = \sqrt{6^2+(-6)^2+0^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = 6\times 6+(-3)\times(-6)+6\times 0 = 54$$

On obtient alors : $\cos(\widehat{BDC}) = \dfrac{54}{9\times 6\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

On a donc bien : $\widehat{BDC} = \dfrac{\pi}{4}$

4) a) Faisons une figure avec les données que l'on dispose :



Soit $\mathscr{A}$ l'aire du triangle BDC, on a alors, en posant H le projeté orthogonal de C sur $[DB]$

$$\mathscr{A} = \frac{DB\times CH}{2}$$

Pour calculer CH, utilisons le triangle DHC rectangle en H :

$$CH = \sin\frac{\pi}{4}\times DC = \frac{\sqrt{2}}{2}\times 6\sqrt{2} = 6$$

On obtient alors :

$$\mathscr{A} = \frac{9\times 6}{2} = 27$$

b) Pour trouver la distance de A au plan (BDC), il faut connaître la hauteur issue de A sur le triangle BDC. Utilisons alors le volume $\mathcal{V}(ABCD)$ du tétraèdre en appelant H' le projeté orthogonal de A sur le plan (BDC). On a alors :

$$\mathcal{V}(ABCD) = \frac{\mathscr{A}\times AH'}{3} = 9AH'$$

Or on sait que : $\mathcal{V}(ABCD) = 27,$ on en déduit alors que :

$$AH' = 3$$

3.3 Distance d'un point à un plan

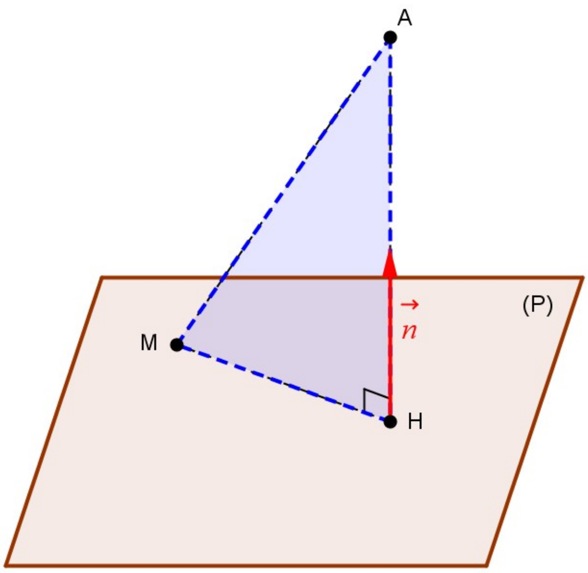
Théorème 2 : Soit un plan (P) d'équation cartésienne :

$$ax + by + cz + d$$

Soit un point $A(x_A; y_A; z_A)$. La distance de A au plan (P), notée : $d(A; (P))$ est égale à :

$$d(A; (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Démonstration : (ROC) : Soit un point $M(x; y; z)$ du plan et H la projection orthogonale de $A(x_A; y_A; z_A)$ sur le plan (P). On peut faire la figure suivante :



Ici le vecteur normal est dans le même sens que $\overrightarrow{AH}$, mais il pourrait être opposé. Dans cette perspective, on prend la valeur absolue du produit scalire suivant :

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}| &= |\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}| \\ &= AH \times ||\vec{n}|| \end{aligned}$$

On cherche la distance AH, on a donc :

$$AH = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{||\vec{n}||}$$

On a alors :

$$\overrightarrow{AM} = (x - x_A ; y - y_A ; z - z_A) \quad \text{et} \quad \vec{n} = (a ; b ; c)$$

On a donc :

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}| &= |a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A)| \\ &= |ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A)\end{aligned}$$

Comme M appartient au plan, on a $ax + by + cz = -d$, d'où :

$$\begin{aligned}&= |-(ax_A + by_A + cz_A + d)| \\ &= |ax_A + by_A + cz_A + d|\end{aligned}$$

Comme $||\vec{n}|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, on obtient alors :

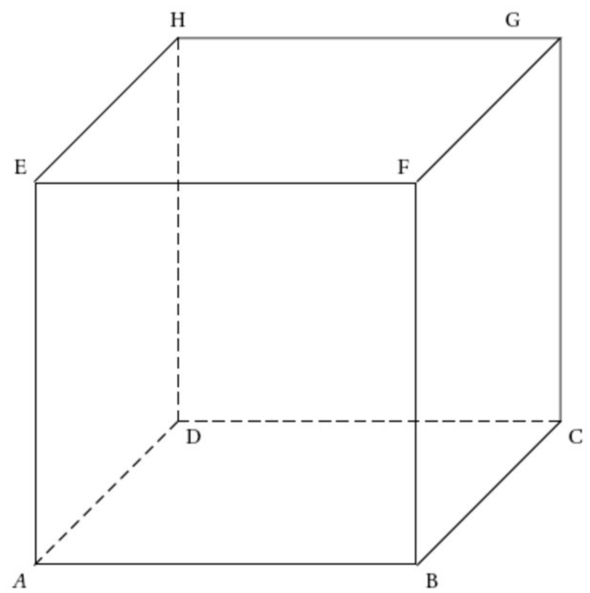
$$AH = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exemple : Soit le plan (P) d'équation : $2x + 3y - z = 0$ et $A(3;5;-1)$. Déterminer la distance de A à (P). On a :

$$d(A,(P)) = \frac{|2 \times 3 + 3 \times 5 - (-1)|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1}} = \frac{22}{\sqrt{14}}$$

3.4 Exercice BAC

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous.



Dans l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $(A; \overrightarrow{AB}\,; \overrightarrow{AD}\,; \overrightarrow{AE}\,)$.
On note I le point de coordonnées $\left(\frac{1}{3}\,;\,1\,;\,1\right)$.

1) Placer le point I sur la figure.
2) Le plan (ACI) coupe la droite (EH) en J. Démontrer que les droites (IJ) et (AC) sont parallèles.
3) On note R le projeté orthogonal de I sur la droite (AC).

a) Justifier que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

i) Il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AR} = k\overrightarrow{AC}$.

ii) $\overrightarrow{IR} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

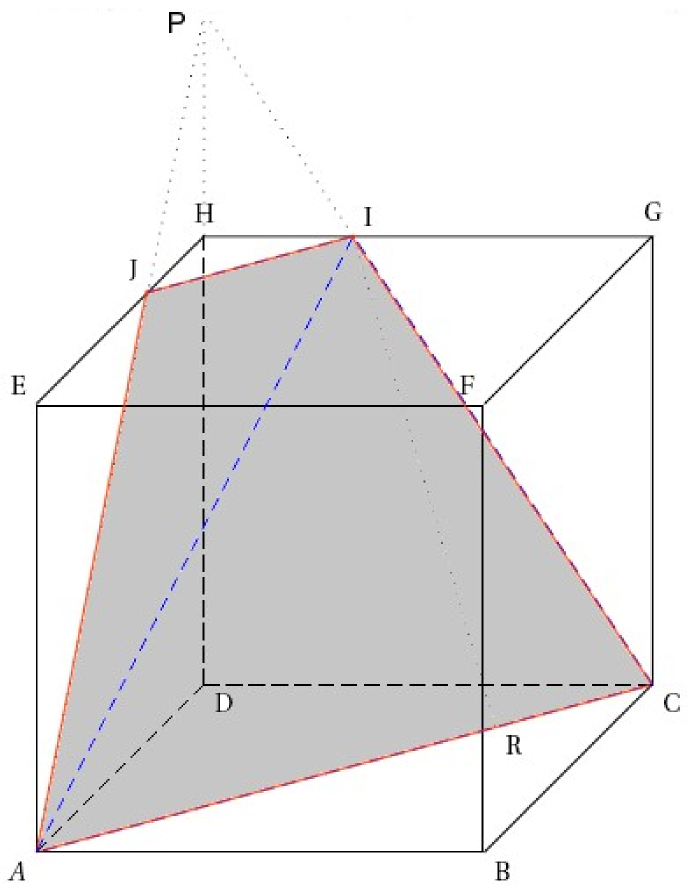
b) Calculer les coordonnées du point R,

c) En déduire que la distance IR s'exprime par $IR = \dfrac{\sqrt{11}}{3}$.

4) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(3\ ;\ -3\ ;\ 2)$ est normal au plan (ACI).
En déduire une équation cartésienne du plan (ACI).

5) Démontrer que la distance du point F au plan (ACI) est $\dfrac{5}{\sqrt{22}}$.

1) On peut faire la figure suivante :



2) Pour déterminer le point J, il s'agit de déterminer l'intersection du plan (ACI) avec l'arête $[EH]$. On prend alors une droite commune avec les faces $CDHG$ et $ADHE$.

Dans la face $CDHG$ (face de derrière) la droite (IC) coupe la droite (DH) en P.
Dans la face $ADHE$ (face de gauche) la droite (PA) coupe la droite (EH) en J.

Le plan (ACI) coupe donc deux faces parallèles $ABCD$ et $EFGH$ respectivement en (IJ) et (AC). Les droites (IJ) et (AC) sont donc parallèles.

3) a) R se trouve sur (AC), donc les vecteurs $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que : $\overrightarrow{AR} = k\overrightarrow{AC}$

Comme R est la projection orthogonale de I sur (AC), donc $\overrightarrow{IR}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AC}$, on a donc : $\overrightarrow{IR} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

b) En applquant ces deux relations, on peut déterminer les coordonnées de $R(x;y;z)$. on a :

$$\overrightarrow{IR} = \left(x - \frac{1}{3}; y-1; z-1\right) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = (1;1;0)$$

en appliquant la deuxième relation :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IR} \cdot \overrightarrow{AC} &= 0 \\ x - \frac{1}{3} + y - 1 &= 0 \\ x + y &= \frac{4}{3} \qquad (1) \end{aligned}$$

En appliquant la première relation :

$$\overrightarrow{AR} = k\overrightarrow{AC}$$
$$\begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = 0 \end{cases}$$

On en déduit que $x = y$

En remplaçant dans (1), on en déduit que : $R\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; 0\right)$

c) On calcule $\overrightarrow{IR} = \left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -1\right)$, on a :

$$IR = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + 1} = \frac{\sqrt{11}}{3}$$

4) Pour montrer que $\vec{n}$ est orthogonal au plan $ACI)$, il faut montrer qu'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires, soit par exemple : $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AI}$

On a :

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} &= 3 \times 1 - 3 \times 1 + 2 \times 0 \\ &= 3 - 3 \\ &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AI} &= 3 \times \frac{1}{3} - 3 \times 1 + 2 \times 1 \\ &= 1 - 3 + 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le vecteur $\vec{n}$ est donc normal au plan $ACI)$
Une équation du plan $ACI)$, obéit à :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} &= 0 \\ 3x - 3y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

5) La distance de F au plan (ACI) est donc avec $F(1;0;1)$:

$$\begin{aligned} d(F,(ACI)) &= \frac{|3\times 1 - 3\times 0 + 2\times 1|}{\sqrt{3^2+(-3)^2+2^2}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{22}} \end{aligned}$$

4 Equations paramétriques d'une droite

4.1 Théorème

Théorème 3 : Soit une droite (Δ) définie par un point $A(x_A;y_A;z_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$.
La droite (Δ) admet donc un système d'équations paramètriques de la forme :

$$(\Delta) \quad \begin{cases} x = x_A + a\,t \\ y = y_A + b\,t \\ z = z_A + c\,t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Démonstration : Soit un point quelconque $M(x;y;z)$ de Δ), alors $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, donc :

$$\exists t \in \mathbb{R} \quad \text{tel que :} \quad \overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} x - x_A = a\,t \\ y - y_A = b\,t \\ z - z_A = c\,t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + a\,t \\ y = y_A + b\,t \\ z = z_A + c\,t \end{cases}$$

Remarque : Pour une demi-droite, il suffit de remplacer $t \in \mathbb{R}$, par une section commançante ou une section finnissante : $]-\infty;\alpha]$ ou $[\alpha;+\infty[$

Pour un segment il suffit de remplacer $t \in \mathbb{R}$, par un intervalle fermé $[\alpha;\beta]$.

4.2 Exercices

1) Donner un système d'équations paramétriques de la droite d définie par :

$$A(2;1;-1) \quad \text{et} \quad \vec{u}(0;1;-1)$$

2) A et B ont pour coordonnées respectives :

$$A(-2;1;0) \quad \text{et} \quad B(2,3,1)$$

Donner un système d'équations paramétriques de chacun des ensembles suivants :

a) La droite (AB)

b) Le segment $[AB]$

c) La demi-droite $[AB)$

d) La demi-droite $[BA)$

3) Les représentations paramétriques suivantes sont-elles associées à une même droite ?

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x = 3 - 6s \\ y = -3s + 2 \\ z = 9s - 4 \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏

1) La droite d a pour système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

2) Un vecteur de la droite (AB) est : $\overrightarrow{AB} = (4; 2; 1)$.

a) La droite (AB)a pour système d'équations paramétriques :

$$(AB) \quad \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

b) Pour déterminer l'intervalle du paramètre pour le segment $[AB]$, on doit connaître la valeur de t pour avoir le point B : on trouve $t = 1$. On a donc :

$$[AB] \quad \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases} \quad t \in [0; 1]$$

c) pour la demi-droite $[AB)$. Le paramètre doit être positif pour avoir le point B, on a donc :

$$[AB) \quad \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}_+$$

d) Pour la demi droite $[BA)$. Le paramètre doit être inférieur à 1 pour contenir A. On a donc :

$$[BA) \quad \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases} \quad t \in] - \infty; 1]$$

3) Pour que les deux représentations soit la même droite, il faut que leur vecteur directeur soient colinéaires et qu'elles possèdent un point commun.

5 Barycentre dans l'espace

Remarque : On retrouve les mêmes résultats que dans la géométrie plane.

5.1 Barycentre de deux points

Définition 3 : On appelle barycentre de deux points A et B associés aux coefficients α et β tels que $\alpha + \beta \neq 0$, le point G défini par :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$$

Théorème 4 : On retrouve les résultats suivants :

➪ Pour placer le point G, on a :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

➪ Formule de réduction :

$$\forall M \in \mathscr{P} \quad \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$$

➪ Coordonnées du point G :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}OB$$

Remarque : L'opération barycentre est une opération homogène, c'est à dire que l'on ne change pas le barycentre si l'on multiplie les coefficient par un même réel k.

Le barycentre de $(A, -1)$ et $(B, 2)$ est le même que celui de $(A, 2)$ et $(B, -4)$.

Remarque : Les points A, B et G sont alignés. La droite (AB) est alors l'ensemble des barycentres de (A, α) et (B, β) lorsque α et β parcourent $\mathbb{R}$.

5.2 Barycentre de 3 points

Définition 4 : On appelle barycentre de trois points A,B et C associés aux coefficients α, β et γ tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, le point G défini par :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

Théorème 5 : Théorème d'associativité

Soit G barycentre de (A, α), (B, β) et (C, γ).

Si H est le barycentre de (A, α) et (B, β) alors :

G est le barycentre de $(H, \alpha + \beta)$ et (C, γ)

Remarque : Ce théorème est très pratique pour placer le barycentre de trois points. On place d'abord le barycentre H intermédiaire puis le barycentre G.

Théorème 6 : On retrouve les résultats du barycentre de deux points :

➪ Pour exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$

➪ Formule de réduction :

$$\forall M \in \mathscr{P} \quad \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

➪ Coordonnées du points G :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OC}$$

Remarque : Les points A, B, C et G sont coplanaires.

5.3 Barycentre de n points

On peut généraliser la notion de barycentre à n points.

Définition 5 : On appelle barycentre de n points A_1,A_2,..., A_n associés aux coefficients α_1, α_2,... α_n tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \neq 0$, le point G défini par :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_iG} = \vec{0}$$

Remarque : On peut généraliser le théorème d'associativité du barycentre à n points.

Théorème 7 : On retrouve les résultats suivants :

➪ Formule de réduction :

$$\forall M \in \mathscr{P} \quad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i\overrightarrow{MA_i} = \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_1\right)\overrightarrow{MG}$$

➪ Coordonnées du point G

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i}\left(\sum_{\alpha_i}^{n} \overrightarrow{OA_i}\right)$$

5.4 Exercices

5.4.1 Exercice 1

$ABCD$ est un tétraèdre, I et J sont les milieu de $[AD]$ et $[BC]$. Les point K et L sont définis par :

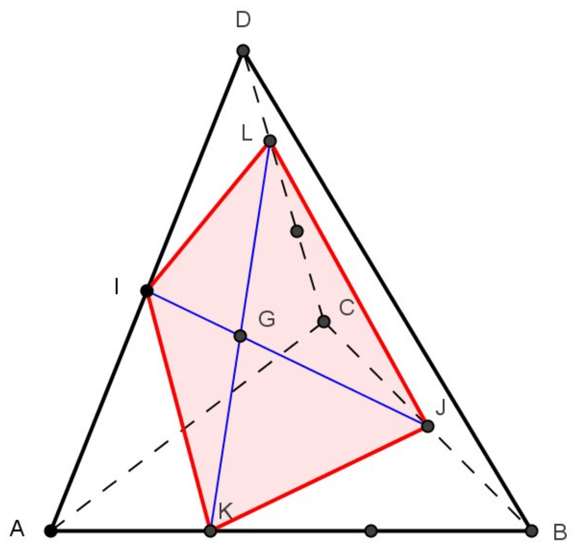
$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$$

G est le barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$ et $(D, 2)$.

1) a) Prouver que les point I, J et G sont alignés.
   b) Prouver que les points K, L et G sont alignés.
2) En déduire que les points I, J, K et L sont coplanaires.

✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏

1) a) Faisons d'abord une figure :



Comme $I = m[AD]$, I est l'isobarycentre de $(A, 2)$ et $(D, 2)$.

Comme $J = m[BC]$, J est l'isobarycentre de $(B, 1)$ et $(C, 1)$.

D'après le théorème d'associativité, G est donc le barycentre de $(I, 4)$ et $(J, 2)$, on a alors :

$$\overrightarrow{IG} = \frac{2}{2+4}\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IJ}$$

Les points I, J et G sont donc alignés.

b) Soit H le barycentre de $(A, 2)$ et $(B, 1)$, donc on a :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{on a donc :} \quad H = K$$

Soit H' le barycentre de $(C, 1)$ et $(D, 2)$, donc on a :

$$\overrightarrow{AH'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} \quad \text{on a donc :} \quad H' = L$$

D'après le théorème d'associaltivité, on a G isobarycentre de $(K, 3)$ et $(L, 3)$. G est donc le milieu de $[KL]$

Les points K, L et G sont donc alignés.

2) les droites (IJ) et (KL) sont donc sécante en G. Les points I, J, K et L sont donc coplanaires.

5.4.2 Exercice 2

A, B et C sont trois points de l'espace et k un réel de l'intervalle $[-1; 1]$.
On note G_k le barycentre de $(A, k^2 + 1)$, (B, k) et $(C, -k)$.

1) Représenter les points A, B et C, le milieu I de $[BC]$ et construire les point G_1 et G_{-1}.

2) a) Prouver que pour tout réel k de $[-1; 1]$, on a :

$$\overrightarrow{AG_k} = -\frac{k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$$

b) Donner le tableau de variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[-1; 1]$ par :

$$f(x) = -\frac{x}{x^2+1}$$

c) En déduire l'ensemble des barycentre G_k lorsque k décrit l'intervalle $[-1; 1]$.

3) Préciser l'ensemble $\mathscr{E}$ des point M de l'espace tels que :

$$||2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|| = ||2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}||$$

4) Préciser l'ensemble $\mathscr{F}$ des point M de l'espace tels que :

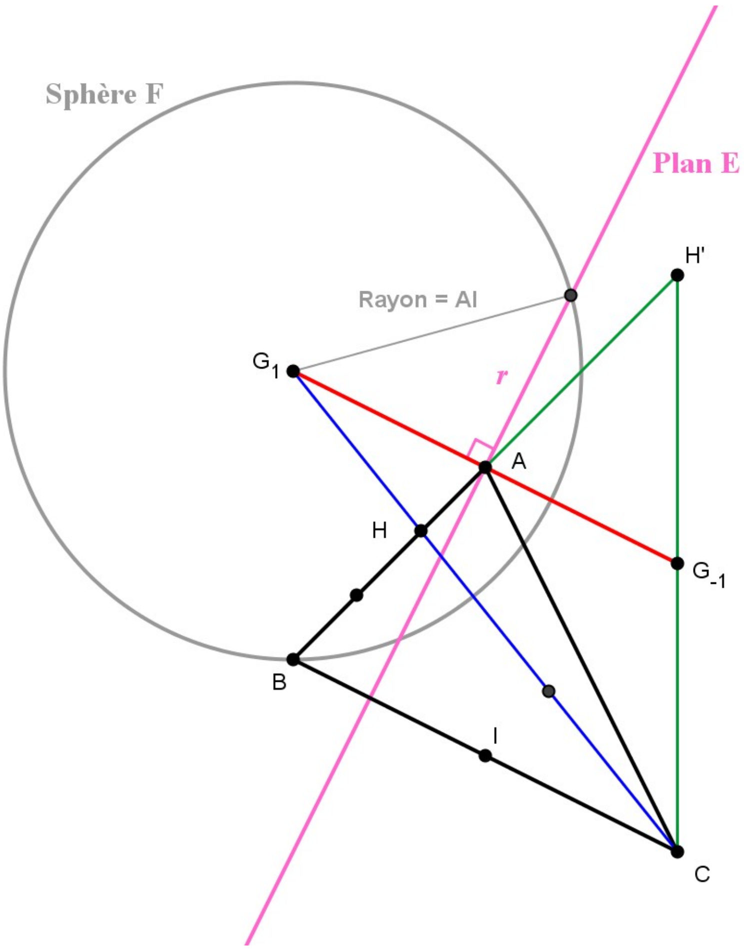
$$||2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|| = ||2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}||$$

5) L'espace est maintenant muni s'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Les point A, B et C ont pour coordonnées respectives $(0; 0; 2)$, $(-1; 2; 1)$ et $(-1; 2; 5)$.
Le point G_k et les ensemble $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont définis comme ci-dessus.

a) Calculer les coordonnées de G_1 et G_{-1}. Prouver alors que $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont sécants.

b) Calculer le rayon du cercle Γ, intersection de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$.

1) Faisons une figure que l'on complétera au fur et à mesure de l'exercice :



➪ Construction de G_1 barycentre de $(A,2)$, $(B,1)$, $(C,-1)$.

Soit H le barycentre de $(A,2)$ et $(B,1)$, on a alors :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

D'après le théorème d'associativité, on a : G_1 barycentre de $(H,3)$ et $(C,-1)$, on a alors :

$$\overrightarrow{HG_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{HC}$$

➪ Construction de G_{-1} barycentre de $(A,2)$, $(B,-1)$, $(C,1)$.

Soit H' le barycentre de $(A,2)$ et $(B,-1)$, on a alors :

$$\overrightarrow{AH'} = -\overrightarrow{AB}$$

D'après le théorème d'associativité, on a : G_{-1} barycentre de $(H',1)$ et $(C,1)$, on a alors :

$$G_{-1} = m[H'C]$$

2) a) Comme G_k est le barycentre de (A, k^2+1), (B, k) et $(C, -k)$, on a :

$$\begin{aligned}
&(k^2+1)\overrightarrow{G_kA} + k\,\overrightarrow{G_kB} - k\,\overrightarrow{G_kC} = \overrightarrow{0}\\
&(k^2+1)\overrightarrow{G_kA} + k\,(\overrightarrow{G_kA+} + \overrightarrow{AB}\,) - k\,(\overrightarrow{G_kA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}\\
&(k^2+1+k-k)\,\overrightarrow{G_kA} = -k\,(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\,)\\
&(k^2-1)\,\overrightarrow{G_kA} = -k\,\overrightarrow{CB}\\
&(k^2-1)\,\overrightarrow{G_kA} = k\,\overrightarrow{BC}\\
&\overrightarrow{AG_k} = -\frac{k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que (AG_k) et (BC) sont parallèles.

b) Étude des variation de f sur $[-1;1]$. Calculons la dérivée :

$$f'(x) = \frac{-x^2-1+2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$$

Le signe de f' est donc le signe de (x^2-1). Donc dans l'intervalle $[-1;1]$, on est entre le racines, le signe est donc négatif. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	-1		1
$f'(x)$	0	—	0
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$

c) Quand k parcourt $[-1;1]$, le point G_k se déplace sur la parallèle (BC) passant par A, de $AG_{-1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ à $AG_1 = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Conclusion le point G_k parcourt le segment $[G_{-1}G_1]$.

3) Déterminons l'ensemble $\mathscr{E}$. D'après la formule de réduction appliquée aux barycentres G_1 et G_{-1}, on a :

$$\begin{aligned}
2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} &= 2\overrightarrow{MG_1}\\
2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} &= 2\overrightarrow{MG_{-1}}
\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
||2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\,|| &= ||2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\,||\\
||2\overrightarrow{MG_1}\,|| &= ||2\overrightarrow{MG_{-1}}\,||\\
MG_1 &= MG_{-1}
\end{aligned}$$

L'ensemble $\mathscr{E}$ est alors le plan médiateur au segment $[G_1G_{-1}]$. Comme A est le milieu de $[G_1G_{-1}]$, ce plan est orthogonal à (ABC) et passe par A.

4) Pour l'ensemble $\mathscr{F}$, la première norme est identique à l'ensemble $\mathscr{E}$. Dans la seconde la somme des coefficients des vecteurs est nulle, donc il s'agit d'un vecteur constant. En introduisant le point A dans la rela tion on obtient :

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} &= 2\overrightarrow{MA} - (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= (2-1-1)\overrightarrow{MA} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \end{aligned}$$

En introduisant $I = m[BC]$, on obtient :

$$= -2\overrightarrow{AI}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} ||2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|| &= ||2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|| \\ ||2\overrightarrow{MG_1}|| &= ||-2\overrightarrow{AI}|| \\ MG_1 &= AI \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathscr{F}$ est alors la sphère de centre G_1 et de rayon AI.

Remarque : On sait que $AG_1 = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IA}$. donc le quadrilatère G_1AIB est un parallélogramme et donc :

$$AI = G_1B$$

La sphère $\mathscr{F}$ passe donc par B.

5) a) D'après les coordonnées de l'énoncé on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG_1} &= \frac{1}{2+1-1}(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} \\ G_1 &= \left(0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,;\, 0-1+1\,;\, 2 + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right) \\ G_1 &= (0;0;0) \end{aligned}$$

Le point G_1 est donc l'origine O.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG_{-1}} &= \frac{1}{2+1-1}(2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \\ &= \overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} \\ G_{-1} &= \left(0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,;\, 0+1-1\,;\, 2 - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) \\ G_{-1} &= (0;0;4) \end{aligned}$$

Pour que le plan $\mathscr{E}$ intercepte la sphère $\mathscr{F}$, il faut que la distance de G_1 au plan $\mathscr{E}$ soit inférieur au rayon de la sphère $AI = G_1B$
Or le plan $\mathscr{E}$ est le plan médiateur de $[G_1G_{-1}]$, donc sa distance à G_1 est donnée par G_1A :

$$G_1A = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} = 2$$

Le rayon de la sphère G_1B est égal à :

$$G_1B = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

On a bien $G_1A < G_1B$. Le plan $\mathscr{E}$ intercepte donc la sphère $\mathscr{F}$ en un cercle Γ.

b) Pour connaître le rayon r du cercle Γ, appliquons le théorème de Pythagore (cf figure du début)

$$r^2 = G_1B^2 - G_1A^2 = 6 - 4 = 2 \quad \text{on a donc :} \quad r = \sqrt{2}$$