Géométrie dans l'espace

Table des matières

1 Introduction

1.1 Vecteurs dans l'espace

La définition d'un vecteur dans l'espace euclidien reste identique à celle du plan. Un vecteur $\overrightarrow{u}$ est donc défini par :

- Une direction
- Un sens
- une norme notée : $||\overrightarrow{u}||$

Les opérations avec les vecteurs sont aussi identique, a savoir :

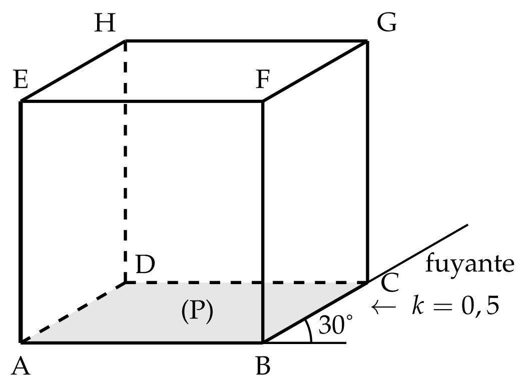
- La relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- La construction de la somme de deux vecteurs de même origine par un parallélogramme.
- Le produit d'un vecteur par un scalaire,
- La colinéarité : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaire $\Leftrightarrow$ $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$

1.2 Le plan

Définition 1 : Un plan est défini par l'une des conditions suivante :

1) Trois points A, B, C non alignés. Le plan est alors noté (ABC)
2) Deux droites sécantes ou parallèles
3) Un point et deux vecteurs non colinéaires
4) Un point et un vecteur normal $\overrightarrow{n}$

Exemple : Pour visualiser un plan, la figure clé est le cube. On le représente en perspective cavalière avec des fuyantes entre 30°et 60°et avec un coeficient de réduction de 0,5 à 0,7. La perspective cavalière ne conserve plus l'orthogonalité mais conserve le parallélisme.



Le plan (P) peut être défini par :

1) Les points A, B et C : (ABC)
2) Les droites (AC) et (BD)
3) Les droites (AB) et (CD)

4) Le point A et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

5) Le point A et le vecteur normal $\overrightarrow{DH}$

1.3 Positions relatives entre deux droites

Deux droites peuvent être :

Coplanaires : si les deux droites appartiennent à un même plan. Si les droites (AB) et (CD) sont coplanaires si et seulement si on peut exprimer $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Exemple : Dans le cube précédent (EF) et (HG) sont coplanaires car : $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}$

Sécantes : si les droites se coupent en un point.

Parallèles : si les droites sont coplanaires et n'ont aucun point commun. (eventuellement les droites peuvent être confondues)

Perpendiculaires : si les droite se coupent à angle droit.

Orthogonales : s'il existe une droite parallèle à la seconde qui est perpendiculaire à la première.

Exemple : Dans notre cube, les droites (AB) et (DH) sont orthogonales car il existe (AE)//(DH) et (AE)$\perp$(AB)

Quelconques : Dans notre cube, on ne peut rien dire des droites (AB) et (DG)

1.4 Positions relatives entre un plan et une droite et entre deux plans

Une droite peut être :

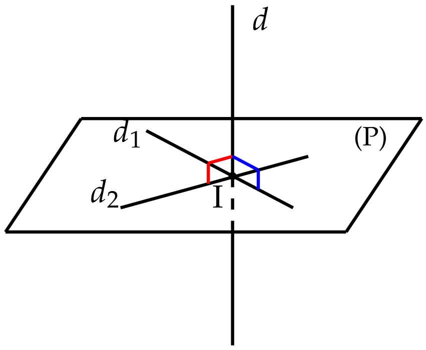
Contenu dans un plan.

Sécante à un plan. Dans notre cube, la droite (DH) est sécante au plan (ABC) en D.

Parallèle à un plan si la droite et le plan n'ont pas de point commun. Dans notre cube, la droite (GH) est parallèle au plan (ABC).

Perpendiculaire ou orthogonale à un plan s'il existe une droite du plan perpendiculaire à la droite. Dans notre cube, la droite (DH) est orthogonale au plan (ABC) car (DH)$\perp$(DC).

Si une droite est orthogonale à un plan en un point I, alors toute droite du plan passant par I est perpendiculaire à cette droite.

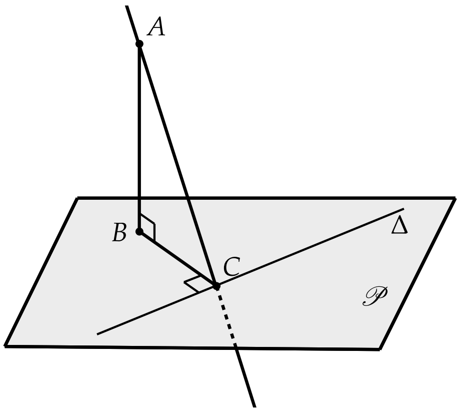


Exemple : Δ est une droite contenue dans le plan $\mathscr{P}$. Un point A extérieur à $\mathscr{P}$ se projette orthogonalement en B sur $\mathscr{P}$ et B se projette orthogonalement en C sur Δ.

a) Faire une figure

b) Démontrer que les droites (AC) et Δ sont perpendicualaires.

a) On obtient la figure suivante :



b) La droite Δ est orthogonale au plan (ABC) car (BC)$\perp$ Δ. Toute droite du plan (ABC) passant par C est donc perpendiculaire à Δ, en particulier la droite (AC).

Deux plans peuvent être :

Sécants : si les deux plans ont une seule droite en commun. Dans notre cube, (ABC) est sécant à (ABG) en (AB).

Perpendiculaires ou orthogonaux : si une droite du premier est orthogonale au second. Dans notre cube (ABC)$\perp$(BCG) car (AB)$\perp$(BF)

Parallèles : si les deux plans n'ont aucun point commun. (éventuellement confondus). Dans notre cube (ABC)//(EFG).

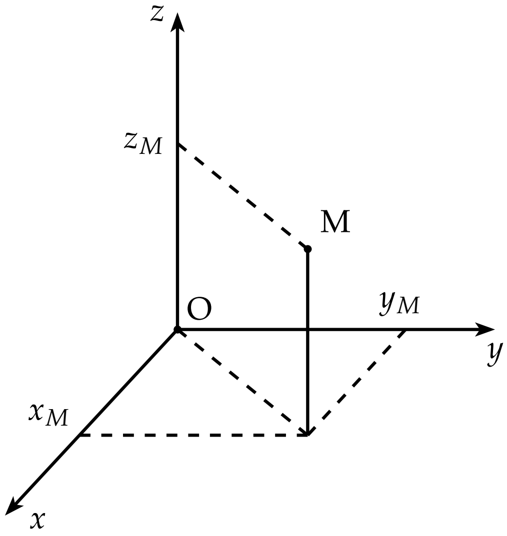
Remarque : Il faut se méfier de la notion de plans orthogonaux.

- Deux plans orthogonaux peuvent contenir des droites parallèles. Dans notre cube, (ABC)$\perp$(BCG) mais (AD)//(GF)
- Deux plans orthogonaux à un troisième ne sont pas nécessairement parallèles.
  Dans notre cube (ABC)$\perp$(BCG) et (ABF)$\perp$(BCG) mais (ABC)$\not\parallel$(ABF).

Par contre :
- Deux plan orthogonaux à une même droite sont parallèles entre eux
- Si deux plans sont orthogonaux, un plan parallèle à l'un est perpendiculaire à l'autre
- Si deux plans sont parallèles, un plan orthogonal à l'un est orthogonal à l'autre.

1.5 Géométrie analytique

Dans l'espace, on définit un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Chaque point a donc trois coordonnées : l'abscisse, l'ordonnée et la cote. On représente ainsi un point A, dans un repère en perspective cavalière :



On a les relations immédiates :
- Si $\overrightarrow{u} = (a; b; c)$, on a alors : $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A \ ; \ y_B - y_A \ ; \ z_B - z_A)$
- Si I est le milieu de [AB] : $\mathrm{I} = \left(\dfrac{x_B + x_A}{2} \ ; \ \dfrac{y_B + y_A}{2} \ ; \ \dfrac{z_B + z_A}{2}\right)$

1.6 Propriétés

Propriété 1 : Pour montrer que :

- trois points A, B et C sont alignés, il faut montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Leurs coordonnées doivent être proportionnelles :
$$\exists k \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$$
- quatre points A, B, C et D sont coplanaires, il faut montrer que tout vecteur formé par deux points peut s'exprimer à l'aide de deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
$$\exists k, \ \exists k' \quad \overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB} + k'\overrightarrow{AC}$$

Exemple : Soient quatre points $A(2;0;1)$, $B(1;-2;1)$, $C(5;5;0)$, $D(-3;-5;6)$.

1) Montrer que A,B et C ne sont pas alignés.
2) Montrer que A, B, C et D sont coplanaires.

1) Les points A,B et C ne sont pas alignés, si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

$$\overrightarrow{AB} = (-1;-2;0) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = (3;5;-1)$$

Manifestement les coordonnées ne sont pas proportionnelles, par exemple en observant la troisième coordonnée des deux vecteur. (-1 n'est pas un multiple de 0)

Les vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés

Remarque : Contrairement à la géométrie plane, on ne peut calculer le déterminant pour tester la colinéarité

2) Les point A, B, C et D sont coplanaires si, et seulement si, on peut exprimer $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

il faut donc déterminer k et k' telles que : $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB} + k'\overrightarrow{AC}$.

On a $\overrightarrow{AD} = (-5;-5;5)$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -k + 3k' = -5 \\ -2k + 5k' = -5 \\ -k' = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k' = -5 \\ -k - 15 = -5 \\ -2k - 25 = -5 \end{cases}$$

on obtient alors $k = -10$ et $k' = -5$.

Les points A, B, C et D sont coplanaires

Remarque : pour déterminer k et k', il faut résoudre un système à trois équations à deux inconnues. Une équation peut alors être incompatible avec les deux autres. Dans ce cas les coefficient k et k' n'existent pas. Les points sont alors non coplanaires

2 Le produit scalaire dans l'espace

2.1 Définition

Note : Le terme « scalaire » est employé pour désigner un nombre réel par opposition au mot vecteur.

Définition 2 : Le produit scalaire dans l'espace se définit de la même façon que dans le plan. Les trois définitions suivantes sont équivalentes et la deuxième demande un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';k')$, le nombre réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ tel que :

1) Identité remarquable appliquée au produit scalaire

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$$

2) Calcul en géométrie analytique

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

On peut aussi utiliser la notation matricielle :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'$$

3) Utilisation de l'angle entre les deux vecteurs

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$$

Démonstration : La démonstration de l'équivalence de ces trois définitions est identique à la démonstration dans le plan. Je vous renvoie donc au chapitre de 1re S sur le produit scalaire.

Par convention : On écrira $\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^2$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2$.

Remarque : Pour la 3e définition, on pourra considérer l'angle $(\vec{u},\vec{v})$, comme un angle géométrique θ (de 0 à π), car la fonction cos est paire. Cela explique d'ailleurs la commutativité du produit scalaire. Le signe du produit scalaire est celui du $\cos(\theta)$

- $\theta < \dfrac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}\cdot\vec{v} > 0$
- $\theta = \dfrac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$
- $\theta > \dfrac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}\cdot\vec{v} < 0$

Exemple : Les points A, B et C ont pour coordonnées respective : $A(6;8;2)$, $B(4;9;1)$ et $C(5;7;3)$

1) Déterminez la mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.

2) Les points A, B et C se projettent orthogonalement respectivement en A', B' et C' sur le plan $(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (d'équation $z=0$).

   a) Déterminez les coordonnées des points A', B' et C'.

b) Déterminez la mesure de l'angle géométrique $\widehat{B'A'C'}$. Que constatez-vous ?

1) Pour calculer l'angle $\widehat{BAC}$ utilisons la 3e définition du produit scalaire. On a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$$

Pour calculer le produit scalaire et les distances AB et AC, on utilise la défénition analytique :

$$\overrightarrow{AB} = (4-6;9-8;1-2) = (-2;1;-1)$$
$$\overrightarrow{AC} = (5-6;7-8;3-2) = (-1;-1;1)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-2)\times(-1) + 1\times(-1) + (-1)\times 1 = 0$$

$$AB = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6} \quad \text{et} \quad AC = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

on obtient alors : $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{0}{\sqrt{18}} = 0$

Conclusion : $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{2}^{\circ}$. Le triangle ABC est rectangle en A

2) a) Pour trouver les coordonnées des points A', B' et C' projection orthogonale surle plan $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on annule la troisième coordonnée. On obtient alors :

$$A'(6;8;0), \quad B'(4;9;0) \quad \text{et} \quad C'(5;7;0)$$

b) Comme pour le 1), on a :

$$\cos(\widehat{B'A'C'}) = \frac{\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'}}{A'B' \times A'C'}$$

On calcule alors :

$$\overrightarrow{A'B'} = (-2;1;0) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{A'C'} = (-1;-1;0)$$

$$\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = (-2)\times(-1) + 1\times(-1) + 0\times 0 = 1$$

$$A'B' = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5} \quad \text{et} \quad A'C' = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$$

on obtient alors : $\cos(\widehat{B'A'C'}) = \dfrac{1}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$

Conclusion : $\widehat{B'A'C'} \simeq 71,5^{\circ}$. Le triangle $A'B'C'$ n'est pas rectangle en A'. La projection orthogonale d'un triangle rectangle n'est pas nécessairement un triangle rectangle. La projection orthogonale ne conserve pas les angles géométriques.

2.2 Propriétés et orthogonalité dans l'espace

Note : Dans l'espace, on réserve le terme de perpendiculaire à deux droites sécantes en angle droit. Dans les autres cas, on utilise le terme orthogonal, pour deux vecteurs, deux droites non sécantes dont les vecteurs directeurs sont orthogonaux, pour une droite et un plan ou de deux plans.

Propriété 2 : Dans l'espace, nous retrouvons les mêmes propriétés que dans le plan :

1) Le produit scalaire est commutatif :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

2) Le produit scalaire est distributif (bilinéarité) par rapport à l'addition de deux vecteurs :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

3) Le produit scalaire est distributif (bilinéarité) par rapport à la multiplication par un scalaire :

$$(a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = ab \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

4) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens si, et seulement si :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$$

5) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires si, et seulement si :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$$

6) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Remarque : Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Exemples :

1) Déterminer le réel α pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux :

$$\vec{u}\left(2\,;-\frac{1}{2}\,;5\right) \qquad \text{et} \qquad \vec{v}\left(-\frac{2}{5}\,;3\,;\alpha\right)$$

2) Les points A et B ont pour coordonnées respectives $A(2;-5;1)$ et $B(0;2;6)$. Démontrer que la droite d qui passe par le point $C(-2;3;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = -4\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3\vec{k}$ est orthogonale à la droite (AB)

3) Les points A, B, C, D et E ont pour coordonnées $A(2;0;2)$, $B(4;0;0)$, $C(1;-2;1)$, $D(-1;1;0)$, $E(1;-1;2)$. Prouvez que les points A, B et C ne sont pas alignés et que le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est normal au plan (ABC).

1) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si leur produit scalaire est nul. On a donc :

$$\begin{aligned} \vec{u}\cdot\vec{v} &= 0 \\ 2\times -\frac{2}{5} - \frac{1}{2}\times 3 + 5\alpha &= 0 \\ -\frac{4}{5} - \frac{3}{2} + 5\alpha &= 0 \\ \alpha &= \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{2}\right) \\ \alpha &= \frac{1}{5}\left(\frac{23}{10}\right) \\ \alpha &= \frac{23}{50} \end{aligned}$$

2) Les droites d et (AB) sont orthogonale si, et seulement si $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux. On a :

$$\begin{aligned} &\vec{u} = (-4;1;-3) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB} = (-2;7;5) \\ &\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB} = -4\times(-2) + 1\times 7 - 3\times(5) = 8+7-15 = 0 \end{aligned}$$

On a donc $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{AB}$. Les coordonnées du points C ne servent à rien sauf à montrer que les droites sont perpendiculaires chose ici non vérifiée.

3) Les points A, B et C ne sont pas alignés si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. On a :

$$\overrightarrow{AB} = (2:0-2) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AC} = (-1;-2;-1)$$

Manifestement les coordonnées ne sont pas proportionnelles du fait des 2^{e} coordonnées (-2 n'est pas un multiple de 0). Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et donc les points A, B et C ne sont pas alignés.(ABC) forme donc un plan

Le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est orthogonal au plan (ABC) si, et seulement si, il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires au plan (ABC). On a alors :

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{DE} = (2;-2:2) \\ &\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE} = 2\times 2 + 0\times(-2) - 2\times 2 = 0 \\ &\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DE} = -1\times 2 - 2\times(-2) - 1\times 2 = 0 \end{aligned}$$

Conclusion : Le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est orthogonal au plan (ABC).

3 Equation de plan

3.1 Définition

Définition 3 : Un vecteur normal à un plan, est un vecteur $\vec{n}$ non nul orthogonal à toutes droites du plan.

Propriété 3 : Soit un plan $\mathscr{P}$, A un point de $\mathscr{P}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal de $\mathscr{P}$.

Le plan $\mathscr{P}$ est l'ensemble des point M tel que : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Démonstration : On admettra cette propriété qui faudrait démontrer dans les deux sens.

Théorème 1 : L'équation cartésienne d'un plan est de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad \text{avec } a, b \text{ et } c \text{ non tous nul}$$

Le vecteur $\vec{n}(a;b;c)$ est alors un vecteur normal au plan.

Démonstration : Soit un plan $\mathscr{P}$, un point A de $\mathscr{P}$, un vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ de $\mathscr{P}$. Un point $M(x;y;z)$ du plan $\mathscr{P}$ vérifie alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} &= 0 \\ a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) &= 0 \\ ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A) &= 0 \end{aligned}$$

On pose $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$, on a alors

$$ax + by + cz + d = 0$$

Réciproquement , si on a l'équation : $ax + by + cz + d = 0$, avec a, b et c non tous nul, on peut toujours trouver un point $A(x_0;y_0;z_0)$ qui verifie l'équation $ax + by + cz + d = 0$. On a alors $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$, par exemple, si $a \neq 0$, on peut prendre $x_0 = -\dfrac{d}{a}$ et $y_0 = z_0 = 0$.

Si $M(x;y;z)$ vérifie l'équation, alors : $ax + by + cz + d = 0$, et en remplaçant $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$, on obtient alors :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Cette égalité traduit alors, en prenant $\vec{n}(a;b;c)$, la relation $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. Ce qui montre que le plan passe par M et a pour vecteur normal $\vec{n}$.

Remarque : L'équation cartésienne n'est pas unique. On peut toujours multiplier les coefficients a, b et c par un facteur k non nul.

Exemples :

1) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\vec{n}$ et passant par un point A.

$$A(\sqrt{2};-2;5) \qquad \vec{n}(2;-3;-1)$$

2) Trouver une équation cartésienne du plan $\mathscr{Q}$ parallèle au plan $\mathscr{P}$ et passant par un point A donné :

$$A(3;-1;0) \qquad \mathscr{P}\ : 2x-y+3z=0$$

3) Déterminer une équation cartésienne au plan médiateur du segment $[AB]$.

$$A(-1;1;0) \qquad B(2;1;-1)$$

1) On doit avoir pour un point M de $\mathscr{P}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} &= 0 \\ 2(x-\sqrt{2})-3(y+2)-(z-5) & \\ 2x-3y-z-2\sqrt{2}-6+5 &= 0 \\ 2x-3y-z-1-2\sqrt{2} &= 0 \end{aligned}$$

2) Si les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont parallèles, un vecteur normal de $\mathscr{P}$ est aussi un vecteur normal de $\mathscr{Q}$. D'après l'équation de $\mathscr{P}$, on peut prendre comme vecteur normal $\vec{n}(2;-1;3)$. On a alors pour un point M de $\mathscr{Q}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} &= 0 \\ 2(x-3)-(y+1)+3(z-0) & \\ 2x-y+3z-6-1 &= 0 \\ 2x-3y-z-7 &= 0 \end{aligned}$$

Conclusion : une équation du plan $\mathscr{Q}$ est : $\quad 2x-3y-z-7=0.$

3) Le plan médiateur d'un segment est le plan dont les points sont équidistants des points A et B. Il passe alors orthogonalement par le milieu du segment $[AB]$.

On détermine les coordonnées du milieu I de $[AB]$. Le plan recherché a alors pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

$$I=\left(\frac{-1+2}{2};\frac{1+1}{2};\frac{0-1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2};1;\frac{-1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AB}=(3;0,-1)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB} &= 0 \\ 3\left(x-\frac{1}{2}\right)+0(y-1)-\left(z+\frac{1}{2}\right) &= 0 \\ 3x-z-\frac{3}{2}-\frac{1}{2} &= 0 \\ 3x-z-2 &= 0 \end{aligned}$$

3.2 Exercice de BAC

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(0;\vec{\imath};\vec{\jmath},\vec{k})$. Les points A, B et C ont pour coordonnées $A(3;-2;2)$,$B(6;1;5)$, $C(6;-2;-1)$.

Partie A

1) Démontrez que le triangle ABC est un triangle rectangle.
2) Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne :

$$x+y+z-3=0$$

Prouvez que $\mathscr{P}$ est orthogonal à la droite (AB) et passe par le point A.
3) Soit $\mathscr{P}'$ le plan orthogonal à la droite (AC) et passant par le point A. Déterminez une équation cartésienne de $\mathscr{P}'$.
4) Déterminez un vecteur directeur de la droite Δ intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

Partie B

1) Soit D le point de coordonnées $(0;4;-1)$. Prouvez que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
2) Calculer le volume du tétraêdre $ABCD$
3) Prouvez que l'angle $\widehat{BDC}$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$ radian.
4) a) Calculez l'aire du triangle BDC.
   b) Déduisez-en la distance du point A au plan (BDC).

Partie A

1) Montrons que le triangle ABC est rectangle en A. Pour cela calculons le produit scalaire suivant : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB}=(3;3;3) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC}=(3;0-3)$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times3+3\times0-3\times3=0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, donc le triangle ABC est rectangle en A.

Remarque : On aurait pu aussi utiliser la réciproque du théorème de Pythagore.

2) Si $\mathscr{P}$ est orthogonal à (AB), alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal de $\mathscr{P}$.

Or l'équation de $\mathscr{P}$ est : $x+y+z-3=0$ donc le vecteur $\vec{n}(1;1;1)$ est un autre vecteur normal de $\mathscr{P}$. Donc si $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$, il doit être colinéaire à $\vec{n}$. Or on sait que $\overrightarrow{AB}(3;3;3)$, on a donc : $\overrightarrow{AB}=3\vec{n}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, donc le plan $\mathscr{P}$ est orthogonal à (AB)

3) Si $\mathscr{P}'$ est orthogonal à (AC), alors $\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}'$. Comme $\mathscr{P}'$ passe par A, alors un point M quelconque de $\mathscr{P}'$ vérifie :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC} &= 0\\ 3(x-3)+0(y+2)-3(z-2) &= 0\\ 3x-3z-3 &= 0\\ x-z-1 &= 0\end{aligned}$$

Conclusion : Le plan $\mathscr{P}'$ a pour équation cartésienne : $\quad x-z-1=0$

4) On cherche un vecteur directeur de l'intersection des deux plans. On obtient donc le système suivant :

$$\Delta\ \begin{cases} x+y+z-3=0 & (1)\\ x\qquad\ -z-1=0 & (2)\end{cases}$$

Si on privilégie le paramètre z, c'est à dire que l'on exprime x et y en fonction de z, on obtient :

A partir de (2) : $\quad x=z+1$

en remplaçant dans (1) : $\quad z+1+y+z-3=0 \quad$ d'où $\quad y=-2z+2$

Pour trouver un vecteur directeur de Δ, comme on sait que cette droite passe par A, il suffit de trouver un autre point de Δ, c'est à dire de donner une valeur à z. Soit en prenant $z=1$, on obtient le point $E(2;0;1)$. On obtient alors comme vecteur directeur : $\vec{u}$

$$\vec{u}=\overrightarrow{EA}=(3-2;-2-0;2-1)=(1;-2;1)$$

Partie B

1) Pour prouver que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC), il suffit de montrer que le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires au plan, soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AD}=(-3;6;-3)$

On calcule alors les produits scalaires suivants :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} &= -3\times3+6\times3-3\times3=0\\ \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} &= -3\times3+6\times0-3\times(-3)=0\end{aligned}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est donc orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. La droite (AD) est donc perpendiculaire au plan (ABC).

2) On rappelle le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre (plus généralement d'une pyramide) :

$$\mathcal{V} = \frac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$$

En appliquant cette formule à $ABCD$. On prend comme base le triangle ABC rectangle en A. Comme la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC), AD est la hauteur issue de D sur ABC. On a alors :

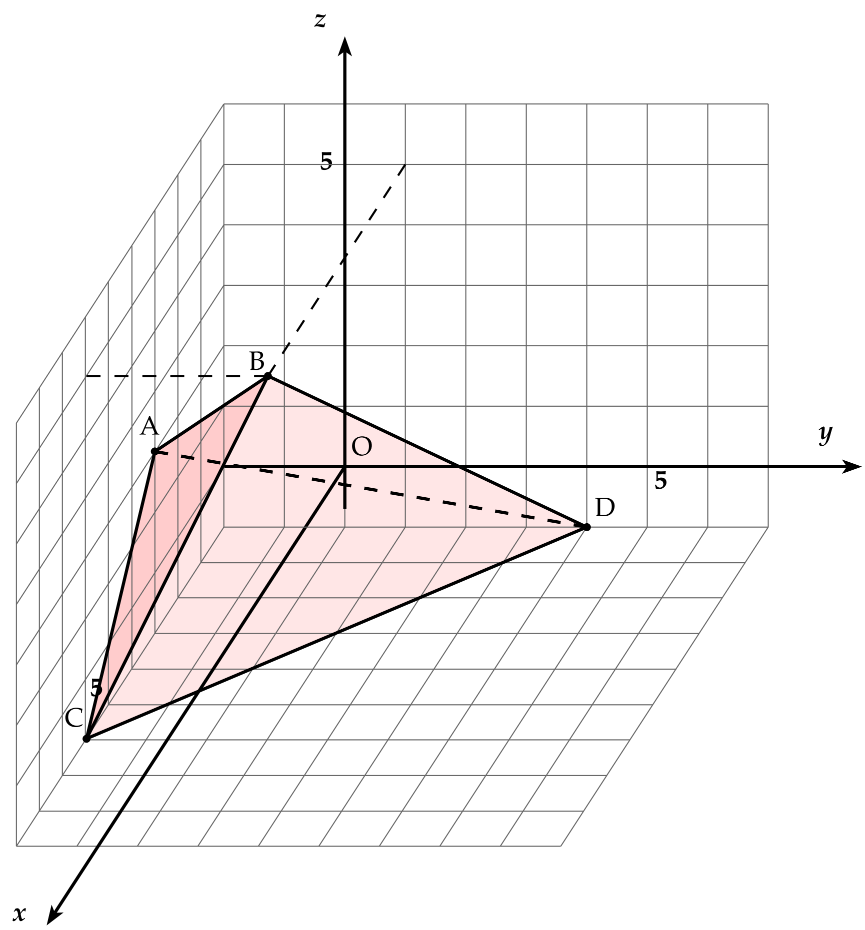
$$\mathcal{V}(ABCD) = \frac{\frac{1}{2}(AB \times AC) \times AD}{3} = \frac{(AB \times AC) \times AD}{6}$$

On calcule les différentes distances :

$$AB = \sqrt{3^2+3^2+3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$
$$AC = \sqrt{3^2+0^2+(-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$
$$AD = \sqrt{(-3)^2+6^2+(-3)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

On obtient alors : $\mathcal{V}(ABCD) = \dfrac{3\sqrt{3} \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{6}}{6} = 27$

Remarque : On peut donner une représentation de ce tétraèdre (représentation pas toujours aisé pour que cela soit clair).



3) Pour calculer l'angle $\widehat{BDC}$, on utilise la troisième définition du produit scalaire :

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = DB \times DC \times \cos(\widehat{BDC}) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\widehat{BDC}) = \frac{\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}}{DB \times DC}$$

On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$, ainsi que les distances DB et DC :

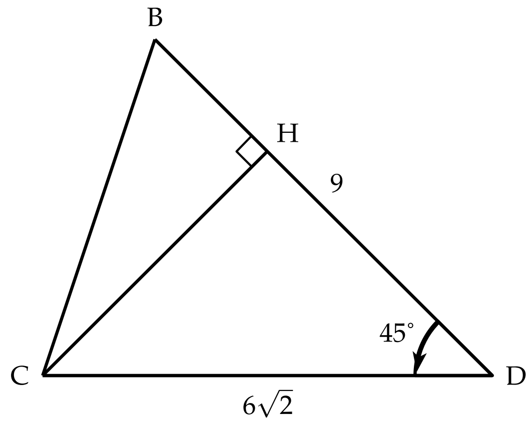
$$\overrightarrow{DB} = (6;-3;6) \qquad DB = \sqrt{6^2+(-3)^2+6^2} = \sqrt{81} = 9$$
$$\overrightarrow{DC} = (6;-6;0) \qquad DB = \sqrt{6^2+(-6)^2+0^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = 6 \times 6 + (-3) \times (-6) + 6 \times 0 = 54$$

On obtient alors : $\cos(\widehat{BDC}) = \dfrac{54}{9 \times 6\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

On a donc bien : $\widehat{BDC} = \dfrac{\pi}{4}$

4) a) Faisons une figure avec les données que l'on dispose :



Soit $\mathscr{A}$ l'aire du triangle BDC, on a alors, en posant H le projeté orthogonal de C sur $[DB]$

$$\mathscr{A} = \frac{DB \times CH}{2}$$

Pour calculer CH, utilisons le triangle DHC rectangle en H :

$$CH = \sin\frac{\pi}{4} \times DC = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 6\sqrt{2} = 6$$

On obtient alors :

$$\mathscr{A} = \frac{9 \times 6}{2} = 27$$

b) Pour trouver la distance de A au plan (BDC), il faut connaître la hauteur issue de A sur le triangle BDC. Utilisons alors le volume $\mathcal{V}(ABCD)$ du tétraèdre en appelant H' le projeté orthogonal de A sur le plan (BDC). On a alors :

$$\mathcal{V}(ABCD) = \frac{\mathscr{A} \times AH'}{3} = 9AH'$$

Or on sait que : $\mathcal{V}(ABCD) = 27$, on en déduit alors que :

$$AH' = 3$$

3.3 Distance d'un point à un plan

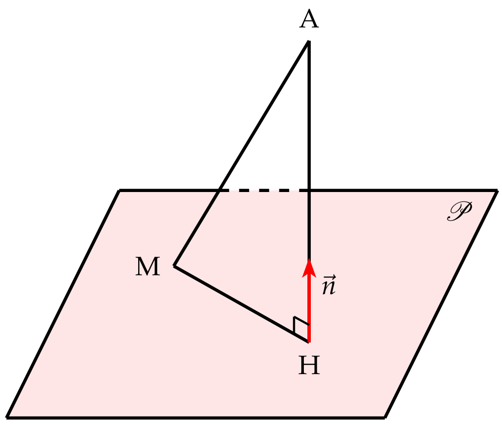
Théorème 2 : Soit un plan (P) d'équation cartésienne :

$$ax + by + cz + d$$

Soit un point $A(x_A; y_A; z_A)$. La distance de A au plan (P), notée : $d(A;(P))$ est égale à :

$$d(A;(P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Démonstration : (ROC) : Soit un point $M(x; y; z)$ du plan et H la projection orthogonale de $A(x_A; y_A; z_A)$ sur le plan (P). On peut faire la figure suivante :



Ici le vecteur normal est dans le même sens que $\overrightarrow{HA}$, mais il pourrait être opposé. Dans cette perspective, on prend la valeur absolue du produit scalire suivant :

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}| &= |\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}| \\ &= AH \times ||\vec{n}|| \end{aligned}$$

On cherche la distance AH, on a donc :

$$AH = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{||\vec{n}||}$$

On a alors :

$$\overrightarrow{AM} = (\, x - x_A \,;\, y - y_A \,;\, z - z_A \,) \quad \text{et} \quad \vec{n} = (\, a \,;\, b \,;\, c \,)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}| &= |a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A)| \\ &= |ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A) \end{aligned}$$

Comme M appartient au plan, on a $ax + by + cz = -d$, d'où :

$$\begin{aligned} &= |-(ax_A + by_A + cz_A + d)| \\ &= |ax_A + by_A + cz_A + d| \end{aligned}$$

Comme $||\vec{n}|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, on obtient alors :

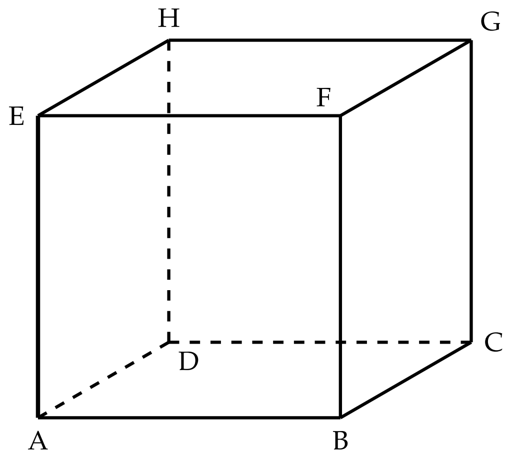
$$AH = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exemple : Soit le plan (P) d'équation : $2x + 3y - z = 0$ et $A(3;5;-1)$. Déterminer la distance de A à (P). On a :

$$d(A,(P)) = \frac{|2 \times 3 + 3 \times 5 - (-1)|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1}} = \frac{22}{\sqrt{14}}$$

3.4 Exercice BAC

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous.



Dans l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.
On note I le point de coordonnées $\left(\frac{1}{3}\ ;\ 1\ ;\ 1\right)$.

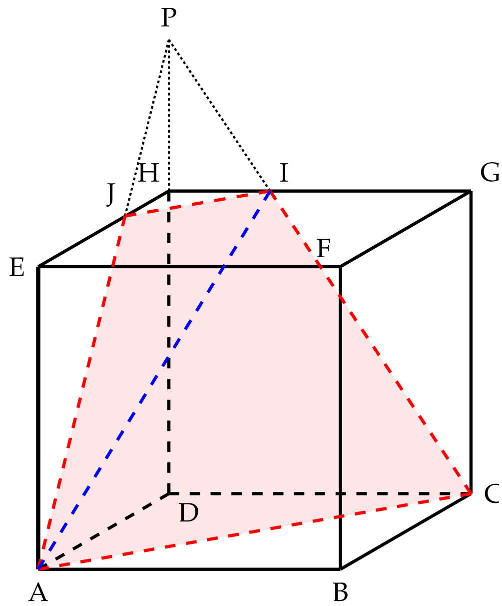
1) Placer le point I sur la figure.
2) Le plan (ACI) coupe la droite (EH) en J. Démontrer que les droites (IJ) et (AC) sont parallèles.
3) On note R le projeté orthogonal de I sur la droite (AC).
   a) Justifier que les deux conditions suivantes sont vérifiées :
      i) Il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AR} = k\overrightarrow{AC}$.
      ii) $\overrightarrow{IR} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
   b) Calculer les coordonnées du point R,
   c) En déduire que la distance IR s'exprime par $IR = \frac{\sqrt{11}}{3}$.

4) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(3\,;\,-3\,;\,2)$ est normal au plan (ACI).

   En déduire une équation cartésienne du plan (ACI).

5) Démontrer que la distance du point F au plan (ACI) est $\dfrac{5}{\sqrt{22}}$.

1) On peut faire la figure suivante :



2) Pour déterminer le point J, il s'agit de déterminer l'intersection du plan (ACI) avec l'arête $[EH]$. On prend alors une droite commune avec les faces $CDHG$ et $ADHE$.

   Dans la face $CDHG$ (face de derrière) la droite (IC) coupe la droite (DH) en P.

   Dans la face $ADHE$ (face de gauche) la droite (PA) coupe la droite (EH) en J.

   Le plan (ACI) coupe donc deux faces parallèles $ABCD$ et $EFGH$ respectivement en (IJ) et (AC). Les droites (IJ) et (AC) sont donc parallèles.

3) a) R se trouve sur (AC), donc les vecteurs $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que : $\overrightarrow{AR} = k\,\overrightarrow{AC}$

   Comme R est la projection orthogonale de I sur (AC), donc $\overrightarrow{IR}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AC}$, on a donc : $\overrightarrow{IR} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

   b) En applquant ces deux relations, on peut déterminer les coordonnées de $R(x;y;z)$. on a :

$$\overrightarrow{IR} = \left(x - \frac{1}{3}; y - 1; z - 1\right) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = (1;1;0)$$

en appliquant la deuxième relation :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IR}\cdot\overrightarrow{AC} &= 0\\ x-\frac{1}{3}+y-1 &= 0\\ x+y &= \frac{4}{3} \qquad (1)\end{aligned}$$

En appliquant la première relation :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AR} &= k\,\overrightarrow{AC}\\ &\begin{cases} x = k\\ y = k\\ z = 0\end{cases}\end{aligned}$$

On en déduit que $x = y$

En remplaçant dans (1), on en déduit que : $\quad R\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};0\right)$

c) On calcule $\overrightarrow{IR} = \left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-1\right)$, on a :

$$IR = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+1} = \frac{\sqrt{11}}{3}$$

4) Pour montrer que $\vec{n}$ est orthogonal au plan ACI), il faut montrer qu'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires, soit par exemple : $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AI}$

On a :

$$\begin{aligned}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} &= 3\times 1-3\times 1+2\times 0\\ &= 3-3\\ &= 0\end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AI} &= 3\times\frac{1}{3}-3\times 1+2\times 1\\ &= 1-3+2\\ &= 0\end{aligned}$$

Le vecteur $\vec{n}$ est donc normal au plan ACI)
Une équation du plan ACI), obéit à :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n} &= 0\\ 3x-3y+2z &= 0\end{aligned}$$

5) La distance de F au plan (ACI) est donc avec $F(1;0;1)$:

$$\begin{aligned}d(F,(ACI)) &= \frac{|3\times 1-3\times 0+2\times 1|}{\sqrt{3^2+(-3)^2+2^2}}\\ &= \frac{5}{\sqrt{22}}\end{aligned}$$

4 Equations paramétriques d'une droite

4.1 Théorème

Théorème 3 : Soit une droite (Δ) définie par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$.
La droite (Δ) admet donc un système d'équations paramétriques de la forme :

$$(\Delta) \quad \begin{cases} x = x_A + a\,t \\ y = y_A + b\,t \\ z = z_A + c\,t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Démonstration : Soit un point quelconque $M(x; y; z)$ de Δ), alors $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, donc :

$$\exists\, t \in \mathbb{R} \quad \text{tel que :} \quad \overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} x - x_A = a\,t \\ y - y_A = b\,t \\ z - z_A = c\,t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + a\,t \\ y = y_A + b\,t \\ z = z_A + c\,t \end{cases}$$

Remarque : Pour une demi-droite, il suffit de remplacer $t \in \mathbb{R}$, par une section commançante ou une section finnissante : $]-\infty; \alpha]$ ou $[\alpha; +\infty[$

Pour un segment il suffit de remplacer $t \in \mathbb{R}$, par un intervalle fermé $[\alpha; \beta]$.

4.2 Exercices

1) Donner un système d'équations paramétriques de la droite d définie par :

$$A(2; 1; -1) \quad \text{et} \quad \vec{u}(0; 1; -1)$$

2) A et B ont pour coordonnées respectives :

$$A(-2; 1; 0) \quad \text{et} \quad B(2, 3, 1)$$

Donner un système d'équations paramétriques de chacun des ensembles suivants :

a) La droite (AB)
b) Le segment $[AB]$
c) La demi-droite $[AB)$
d) La demi-droite $[BA)$

3) Les représentations paramétriques suivantes sont-elles associées à une même droite ?

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x = 3 - 6s \\ y = -3s + 2 \\ z = 9s - 5 \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

1) La droite d a pour système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

2) Un vecteur de la droite (AB) est : $\overrightarrow{AB} = (4; 2; 1)$.
   a) La droite (AB)a pour système d'équations paramétriques :

$$(AB) \quad \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 1 + 2t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

   b) Pour déterminer l'intervalle du paramètre pour le segment $[AB]$, on doit connaître la valeur de t pour avoir le point B : on trouve $t = 1$. On a donc :

$$[AB] \quad \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 1 + 2t \qquad t \in [0; 1] \\ z = t \end{cases}$$

   c) pour la demi-droite $[AB)$. Le paramètre doit être positif pour avoir le point B, on a donc :

$$[AB) \quad \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 1 + 2t \qquad t \in \mathbb{R}_+ \\ z = t \end{cases}$$

   d) Pour la demi droite $[BA)$. Le paramètre doit être inférieur à 1 pour contenir A. On a donc :

$$[BA) \quad \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 1 + 2t \qquad t \in]-\infty; 1] \\ z = t \end{cases}$$

3) Pour que les deux représentations soit la même droite, il faut que leurs vecteurs directeurs soient colinéaires et qu'elles possèdent un point commun.

   On obtient comme vecteurs directeurs respectifs :

$$\vec{u_1} = (2; 1; -3) \quad \text{et} \quad \vec{u_2} = (-6; -3; 9)$$

   On a donc : $\vec{u_2} = -3\vec{u_1}$. Les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont donc colinéaires.

   Prenons un point quelconque de d_1, la première droite. Par exemple avec $t = 0$, on obtient A$(-1; 0; 1)$. Cherchons à déterminer s pour savoir si A est sur la deuxième droite, d_2. On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 3 - 6s = -1 \\ -3s + 2 = 0 \\ 9s - 5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \dfrac{2}{3} \\ s = \dfrac{2}{3} \\ s = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

   Comme on peut déterminer s, A appartient aussi à d_2. On a donc $d_1 = d_2$.

5 Intersection de plans

5.1 Intersection de deux plans

On a vu dans l'introduction, que deux plans peuvent être : sécants, confondus ou strictement parallèles.

Cette situation peut se mettre sous la forme du système suivant :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 & \mathscr{P}_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 & \mathscr{P}_2 \end{cases}$$

On a donc comme vecteurs normaux respectifs :

$$\vec{n_1} = (a_1; b_1; c_1) \text{ et } \vec{n_2} = (a_2; b_2; c_2).$$

Théorème 4 : On a les cas suivants :

1) Si $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas colinéaires les deux plans sont **sécants** en une droite (D).

2) Si $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont colinéaires. Deux cas peuvent se présenter (supposons que a_1 et a_2 non nul, sinon prendre respectivement b_1 et b_2 ou c_1 et c_2)

   a) Si $\dfrac{d_1}{a_1} = \dfrac{d_2}{a_2}$, les deux plans sont **confondus**

   b) Si $\dfrac{d_1}{a_1} \neq \dfrac{d_2}{a_2}$, les deux plans sont **strictement parallèles**.

5.2 Intersection de trois plans

Cette situation peut se mettre sous la forme du système suivant :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 & \mathscr{P}_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 & \mathscr{P}_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 & \mathscr{P}_3 \end{cases}$$

On a donc comme vecteurs normaux respectifs :

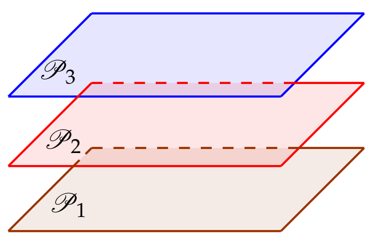
$$\vec{n_1} = (a_1; b_1; c_1), \quad \vec{n_2} = (a_2; b_2; c_2) \text{ et } \vec{n_3} = (a_3; b_3; c_3).$$

On distingue, alors 5 cas d'intersection.

$\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$ et $\vec{n_3}$ sont colinéaires 2 à 2.

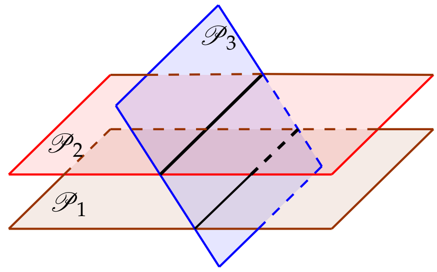
Les trois plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont strictement parallèles.

Le système n'admet **aucune solution**.



<table>
<tr>
<td>
$\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires mais non colinéaires avec $\vec{n}_3$.

Le plan $\mathscr{P}_3$ est sécant avec deux plans parallèles $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

Le système n'admet **aucune solution**.
</td>
<td>


</td>
</tr>
<tr>
<td>
$\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ et $\vec{n}_3$ non colinéaires 2 à 2.

$\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ se coupe en une droite d
$\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$ se coupe en une droite d'

Trois cas peuvent se présenter :

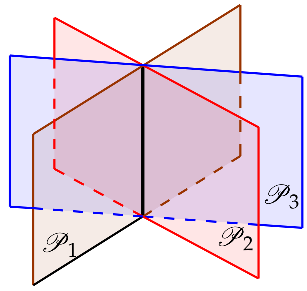
• si d et d' sont confondues.
Les trois plan se coupent en une droite

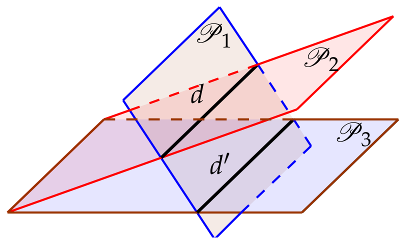
Le système admet une **droite solution**.

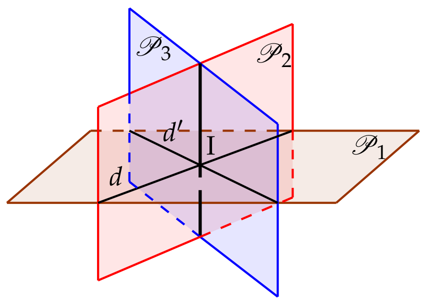
• si d et d' sont strictement parallèles.
Les trois plans n'ont pas d'intersection

La système n'admet **pas de solution**

• si d et d' sont sécants en un point I
Les trois plans sont sécants en un point I

Le système admet une **unique solution**
</td>
<td>






</td>
</tr>
</table>