Exercices
géométrie dans l'espace

Exercice 1

Soient quatre points $A(2;0;1)$, $B(1;-2;1)$, $C(5;5;0)$, $D(-3;-5;6)$.

1) Montrer que A,B et C ne sont pas alignés.
2) Montrer que A, B, C et D sont coplanaires.

Exercice 2

Les points A, B et C ont pour coordonnées respective : $A(6;8;2)$, $B(4;9;1)$ et $C(5;7;3)$

1) Déterminer la mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.
2) Les points A, B et C se projettent orthogonalement respectivement en A', B' et C' sur le plan $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (d'équation $z = 0$).
   a) Déterminer les coordonnées des points A', B' et C'.
   b) Déterminer la mesure de l'angle géométrique $\widehat{B'A'C'}$. Que constatez-vous ?

Exercice 3

1) Déterminer le réel α pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux :

$$\vec{u}\left(2\,;\,-\frac{1}{2}\,;5\right) \qquad \text{et} \qquad \vec{v}\left(-\frac{2}{5}\,;\,3\,;\,\alpha\right)$$

2) Les points A et B ont pour coordonnées respectives $A(2;-5;1)$ et $B(0;2;6)$.
   Démontrer que la droite d qui passe par le point $C(-2;3;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = -4\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3\vec{k}$ est orthogonale à la droite (AB) ? Est-elle perpendiculaire à (AB) ?

3) Les points A, B, C, D et E ont pour coordonnées $A(2;0;2)$, $B(4;0;0)$, $C(1;-2;1)$, $D(-1;1;0)$, $E(1;-1;2)$. Prouvez que les points A, B et C ne sont pas alignés et que le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est normal au plan (ABC).

Exercice 4

1) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\vec{n}$ et passant par un point A.

$$A(\sqrt{2};-2;5) \qquad \vec{n}(2;-3;-1)$$

2) Trouver une équation cartésienne du plan $\mathscr{Q}$ parallèle au plan $\mathscr{P}$ et passant par un point A donné :

$$A(3;-1;0) \qquad \mathscr{P}\ : 2x - y + 3z = 0$$

3) Déterminer une équation cartésienne au plan médiateur du segment $[AB]$.

$$A(-1;1;0) \qquad B(2;1;-1)$$

Exercice 5

Les points A, B et C ont pout coordonnées :

$$A(6;8;2), \quad B(4;9;1) \quad et \quad C(5;7;3)$$

1) Déterminez la mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.
2) Les points A, B et C se projettent orthogonalement respectivement en A', B' et C' sur le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (d'équation $z = 0$).
   a) Déterminez les coordonnées des points A', B' et C'.
   b) Déterminez la mesure de l'angle géométrique $\widehat{B'A'C'}$. Que constatez-vous ?

Exercice 6

Plan perpendiculaires

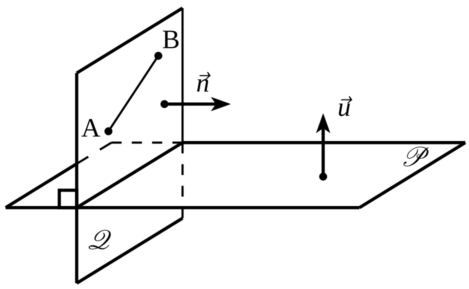
Un repère orthonormal est donné. Les points A et B ont pour coordonnées

$$A(1;-1;2), \quad B(2;0;4)$$

Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation : $x - y + 3z - 4 = 0$.

Objectif : trouver une équation du plan $\mathscr{Q}$ perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ et qui passe par les points A et B.

1) Il s'agit de trouver une équation d'un plan $\mathscr{Q}$ qui passe par un point (même deux en fait).
   Si on connaît un vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ à $\mathscr{Q}$, on sait en trouver une équation. Demandons-nous quelles hypothèses peuvent permettre de trouver un vecteur normal, c'est-à-dire de trouver $(a;b;c)$.



   Par hypothèse, $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont orthogonaux donc un vecteur $\vec{u}$ normal à $\mathscr{P}$ est orthogonal à $\vec{n}$. De plus, le plan $\mathscr{Q}$ contient la droite (AB).
   a) Déterminez les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ normal au plan $\mathscr{P}$.
   b) Justifiez les égalités $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$.

2) Donc les réels a, b et c sont tels que :

$$\begin{cases} a - b + 3c = 0 \\ a + b + 2c = 0 \end{cases}$$

Deux égalités ne permettent pas en général de trouver des valeurs uniques pour a, b et c. Ici, ce n'est pas étonnant car on sait bien qu'il y a une infinité de vecteurs normaux à un plan.
Puisqu'il s'agit d'en trouver un, il suffit de trouver un triplet $(a; b; c)$. Pour cela, on peut choisir une valeur particulière pour a

a) Prouvez que $b = -\dfrac{a}{5}$ et $c = -\dfrac{2a}{5}$.

b) Vérifiez que $\vec{n}(5; -1; -2)$ est un vecteur normal à $\mathscr{Q}$.

c) Trouver alors une équation du plan $\mathscr{Q}$

Note. Ici l'unicité du plan $\mathscr{Q}$ est due au fait que la droite (AB) n'est pas perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$. Si la droite d passant par les deux points donnés est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$, on trouve une infinité de plans $\mathscr{Q}$ car tout plan qui contient la droite d est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.

Exercice 7

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Les points A, B et C ont pour coordonnées $A(3; -2; 2)$, $B(6; 1; 5)$, $C(6; -2; -1)$.

Partie A

1) Démontrez que le triangle ABC est un triangle rectangle.
2) Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne :

$$x + y + z - 3 = 0$$

Prouvez que $\mathscr{P}$ est orthogonal à la droite (AB) et passe par le point A.
3) Soit $\mathscr{P}'$ le plan orthogonal à la droite (AC) et passant par le point A. Déterminez une équation cartésienne de $\mathscr{P}'$.
4) Déterminez un vecteur directeur de la droite Δ intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

Partie B

1) Soit D le point de coordonnées $(0; 4; -1)$. Prouvez que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
2) Calculer le volume du tétraêdre ABCD.
3) Prouvez que l'angle $\widehat{BDC}$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$ radian.
4) a) Calculez l'aire du triangle BDC.
   b) Déduisez-en la distance du point A au plan (BDC).

Exercice 8

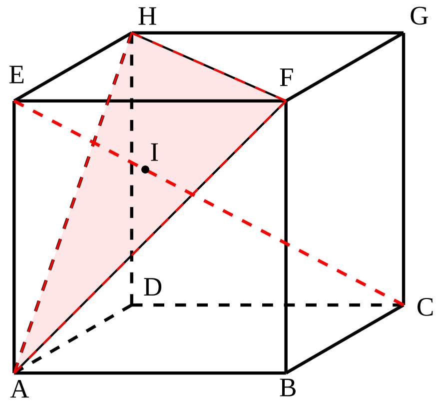
On considère un cube ABCDEFGH, d'arête de longueur a (a réel strictement positif).
Soit I le point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH).

1) Calculer, en fonction de a, les produits scalaires suivants :

$$\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AF}, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}, \quad \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AF}$$

2) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont orthogonaux.
On admettra de même que les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont orthogonaux.

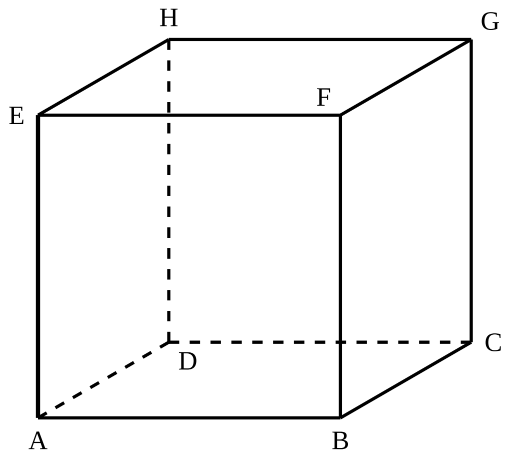
3) En déduire que le point I est le projeté orthogonal de E sur le plan (AFH).
4) a) Justifier les résultats suivants : les droites (AF) et (EH) sont orthogonales, ainsi que les droites (AF) et (EI).
   b) En déduire que la droite (AF) est orthogonales la droite (HI).
   c) Établir de même que la droite (AH) est orthogonale à la droite (FI).
5) Que représenté le point I pour le triangle AFH ?



Exercice 9

BAC : Distance d'un point à un plan

On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.



Dans l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

On note I le point de coordonnées $\left(\frac{1}{3}\ ;\ 1\ ;\ 1\right)$.

1) Placer le point I sur la figure.
2) Le plan (ACI) coupe la droite (EH) en J. Démontrer que les droites (IJ) et (AC) sont parallèles.
3) On note R le projeté orthogonal de I sur la droite (AC).
   a) Justifier que les deux conditions suivantes sont vérifiées :
      i) Il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AR} = k\overrightarrow{AC}$.
      ii) $\overrightarrow{IR} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
   b) Calculer les coordonnées du point R,
   c) En déduire que la distance IR s'exprime par $IR = \dfrac{\sqrt{11}}{3}$.
4) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(3\ ;\ -3\ ;\ 2)$ est normal au plan (ACI).
   En déduire une équation cartésienne du plan (ACI).

5) Démontrer que la distance du point F au plan (ACI) est $\dfrac{5}{\sqrt{22}}$.

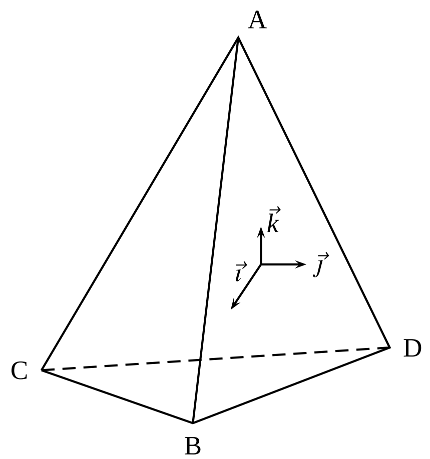
Exercice 10

Tétraèdre et propabilité

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives :

$$\text{A}(0\,;0\,;3),\ \text{B}(2\sqrt{2}\,;\ 0\,;\ -1),\ \text{C}(-\sqrt{2}\,;\ -\sqrt{6}\,;\ -1),\ \text{D}(-\sqrt{2}\,;\ \sqrt{6}\,;\ -1).$$

1) Démontrer que ABCD est un tétraèdre régulier, c'est-à-dire un tétraèdre dont toutes les arêtes sont de même longueur.
2) On note R, S, T et U les milieux respectifs des arêtes [AC], [AD], [BD] et [BC] ; démontrer que RSTU est un parallélogramme de centre O.
3) Ce parallélogramme a-t-il des propriétés supplémentaires ? Expliquer.



Partie B

On dispose de trois tétraèdres identiques au précédent, parfaitement équilibrés. Chacun d'eux a une face peinte en bleu, une face peinte en jaune et deux faces peintes en rouge.

On lance les trois tétraèdres simultanément (on remarquera que, lorsqu'on lance un tel tétraèdre, une seule face est cachée et trois faces sont visibles).

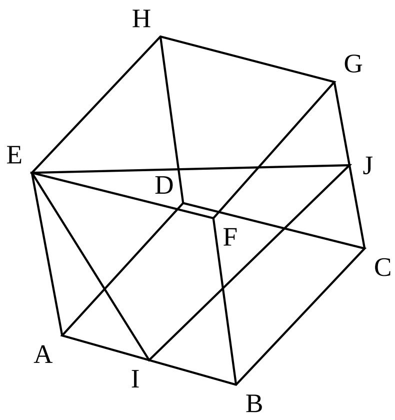
1) Calculer la probabilité pour qu'au moins trois faces rouges soient visibles sur les trois tétraèdres.
2) Calculer la probabilité pour que la couleur bleue ne soit visible sur aucun tétraèdre.
3) Calculer la probabilité de l'évènement E « les six faces rouges sont visibles ».
4) On répète n fois l'expérience qui consiste à lancer les trois tétraèdres.
   Calculer la probabilité p_n pour que l'évènement E soit réalisé au moins une fois.
   Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Exercice 11

Amérique du Sud nov. 2005

Dans cet exercice, une réponse par « VRAI » ou « FAUX », sans justification, est demandée au candidat en regard d'une liste d'affirmations. Toute réponse conforme à la réalité mathématique donne $0,4$ point. Toute réponse erronée enlève $0,1$ point. L'absence de réponse n'est pas comptabilisée. Le total ne saurait être négatif.

On donne le cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1, et les milieux I et J des arêtes [AB] et [CG]. Les éléments utiles de la figure sont donnés ci-contre.
Le candidat est appelé à juger chacune des 10 *affirmations suivantes.*



On utilisera pour répondre la feuille annexe, qui sera rendue avec la copie.

	Affirmation	VRAI ou FAUX
1.	$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}$	
2.	$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$	
3.	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IC}$	
4.	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = AB \times IC \times \cos\dfrac{\pi}{3}$	

On utilise à présent le repère orthonormal $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

	Affirmation	VRAI ou FAUX
5.	Une représentation paramétrique de la droite (IJ) est : $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$, le paramètre t décrivant $\mathbb{R}$.	
6.	Une représentation paramétrique de la droite (IJ) est : $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t+1 \\ y = t+1 \\ z = \frac{1}{2}t+\frac{1}{2} \end{cases}$, le paramètre t décrivant $\mathbb{R}$	
7.	$6x - 7y + 8z - 3 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (IJ).	
8.	L'intersection des plans (FIJ) et (ABC) est la droite passant par l et par le milieu de l'ar ête [DC].	

	Affirmation	VRAI ou FAUX
9.	Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (FIJ).	
10.	Le volume du tétraèdre EFIJ est égal à $\frac{1}{6}$.	

Exercice 12

Métropole juin 2011

On désigne par A, B, C, F les points de coordonnées respectives :
$(4\,;1\,;5)$, $(-3\,;\ 2\,;\ 0)$, $(1\,;\ 3\,;\ 6)$, $(-7\,;\ 0\,;\ 4)$.

1) a) Démontrer que les points A, B, C définissent un plan $\mathscr{P}$ et que ce plan a pour équation cartésienne $x + 2y - z - 1 = 0$.

   b) Déterminer la distance d du point F au plan $\mathscr{P}$.

2) Le but de cette question est de calculer la distance d par une autre méthode.
On appelle Δ la droite qui passe par le point F et qui est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.

   a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

   b) Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point F sur le plan $\mathscr{P}$.

   c) Retrouver le résultat de la question 1) b)

3) Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre F et de rayon 6.

   a) Justifier que le point B appartient à la sphère $\mathcal{S}$.

   b) Préciser le centre et déterminer le rayon du cercle $\mathscr{C}$, intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et du plan $\mathscr{P}$.

Exercice 13

Représentation paramétrique d'une droite

1) On donne le point A(2; 1; −1) et un vecteur $\vec{u}(0;1;-1)$
Déterminer une représentation paramètrique de la droite d qui passe par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

2) On donne les points A(−2; 1; 0) et B(2; 3; 1).
Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB), du segment [AB] et des demi-droite [AB) et (AB].

3) Les représentations paramétriques suivante sont-elles les représentations paramétriques d'une même droite ?

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x = 3 - 6s \\ y = 2 - 3s \\ z = -5 + 9s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

Exercice 14

Intersections de plan et de droites.

1) La droite d a pour représentation paramétrique :

$$d \quad \begin{cases} x = t \\ y = -t + 1 \\ z = 2t - 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

La droite d' est définie par l'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$:

$$d' \quad \begin{cases} 3x - y - 2z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

a) Donner une représentations paramètrique de la droite d'

b) Pourquoi d' est-elle parallèle à d ? d et d' sont-elles strictement parallèles ?

2) Dans chaque cas, trouver l'intersection de la droite d et du plan $\mathscr{P}$.

a) $\mathscr{P} : x - y + 2z - 1 = 0$ et $d \quad \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

b) $\mathscr{P} : 2x + 3y - z = 0$ et $d \quad \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 1 + 2t \\ z = 8t - 3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Exercice 15

Pondichéry avril 2012

Dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère :

- les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ d'équations :

$$\mathscr{P} \; : \; x - y - z - 2 = 0 \quad \text{et} \quad \mathscr{P}' \; : \; x + y + 3z = 0.$$

- la droite $\mathscr{D}$ ayant pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -3-2t \\ y &=& 2t \\ z &=& 1+2t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et justifier la réponse. Une justification est attendue pour chaque réponse.

Proposition 1
La droite $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.
Proposition 2
La sphère $\mathcal{S}$ de centre O et de rayon 2 est tangente au plan $\mathscr{P}$.
Proposition 3
L'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ est la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1-t' \\ y &=& -1-2t' \\ z &=& t' \end{array}\right. \quad t' \in \mathbb{R}.$$

Proposition 4
Les droites $\mathscr{D}$ et Δ sont coplanaires.

Exercice 16

Asie juin 2008

Partie A : Vrai ou faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse la démonstration consistera à proposer un contre-exemple ; une figure pourra constituer ce contre-exempte.

Rappel des notations :

- *$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ désigne l'ensemble des points communs aux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.*
- *L'écriture $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \varnothing$ signifie que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ n'ont aucun point commun.*

1) Si $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \neq \varnothing \quad \text{et} \quad \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 \neq \varnothing,$$

alors on peut conclure que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$ vérifient : $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_3 \neq \varnothing$.

2) Si $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \varnothing$$

alors on peut conclure que $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont tels que : $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \varnothing$ et $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \varnothing$.

3) Si $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \neq \varnothing \text{ et } \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_3 = \varnothing,$$

alors on peut conclure que $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ vérifient : $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 \neq \varnothing$.

4) Si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont deux plans distincts et $\mathscr{D}$ une droite de l'espace vérifiant :

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{D} \neq \varnothing \text{ et } \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \varnothing,$$

alors on peut conclure que $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{D} \neq \varnothing$

Partie B : Intersection de trois plans donnés

Dans un repère orthonorrnal de l'espace on considère les trois plans suivants :

- $\mathscr{P}_1$ d'équation $x + y - z = 0$
- $\mathscr{P}_2$ d'équation $2x + y + z - 3 = 0$,
- $\mathscr{P}_3$ d'équation $x + 2y - 4z + 3 = 0$.

1) Justifier que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants puis déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'interseclion, notée Δ.

2) En déduire la nature de l'intersection $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3$.