Annales sur la géométrie dans l'espace

Exercice 1 :

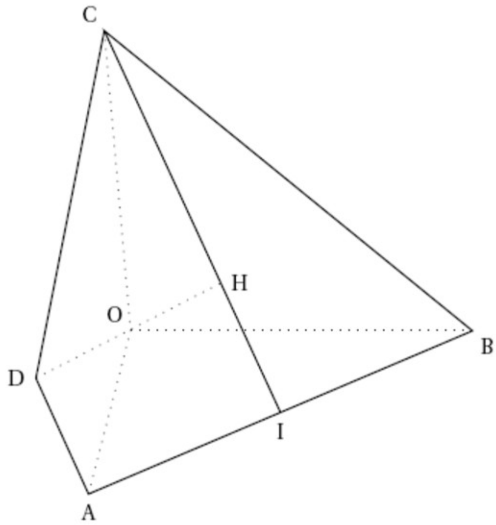
France juin 2003

Soient a un réel strictement positif et $OABC$ un tétraèdre tel que :

• OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O,

• $OA = OB = OC = a$.

On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC, H le pied de la hauteur issue de O du triangle OIC, et D le point de l'espace défini par $\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OD}$.



1) Quelle est la nature du triangle ABC ?
2) Démontrer que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales, puis que H est l'orthocentre du triangle ABC.
3) Calcul de OH
   a) Calculer le volume V du tétraèdre $OABC$ puis l'aire S du triangle ABC.
   b) Exprimer OH en fonction de V et de S, en déduire que $OH = a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
4) Étude du tétraèdre $ABCD$.

   L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O\,;\ \dfrac{1}{a}\overrightarrow{OA},\ \dfrac{1}{a}\overrightarrow{OB},\ \dfrac{1}{a}\overrightarrow{OC}\right)$.

   a) Démontrer que le point H a pour coordonnées : $\left(\dfrac{a}{3}, \dfrac{a}{3}, \dfrac{a}{3}\right)$.
   b) Démontrer que le tétraèdre $ABCD$ est régulier (c'est-à-dire que toutes ses arêtes ont même longueur).
   c) Soit Ω le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$. Démontrer que Ω est un point de la droite (OH) puis calculer ses coordonnées.

Exercice II :

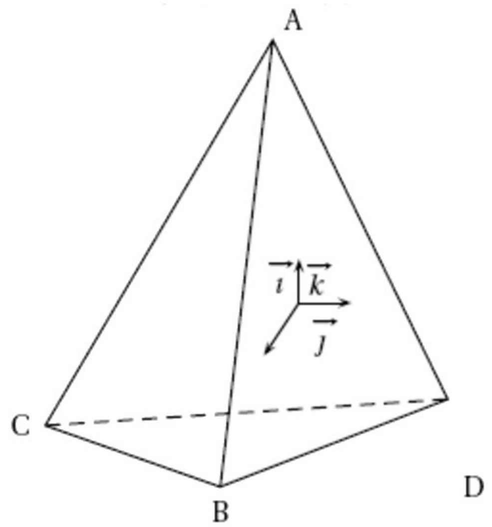
Polynésie 2003

Partie A

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives :

$$A(0;0;3),\ B(2\sqrt{2}\ ;\ 0\ ;\ -1),\ C(-\sqrt{2}\ ;-\sqrt{6}\ ;-1),\ D(-\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{6}\ ;-1)$$

1) Démontrer que $ABCD$ est un tétraèdre régulier, c'est-à-dire un tétraèdre dont toutes les arêtes sont de même longueur.
2) On note R, S, T et U les milieux respectifs des arêetes $[AC]$, $[AD]$, $[BD]$ et $[BC]$; démontrer que $RSTU$ est un parallélogramme de centre O.
3) Ce parallélogramme a-t-il des propriétés supplémentaires ? Expliquer.



Partie B

On dispose de trois tétraèdres identiques au précédent, parfaitement équilibrés. Chacun d'eux a une face peinte en bleu, une face peinte en jaune et deux faces peintes en rouge.
On lance les trois tétraèdres simultanément (on remarquera que, lorsqu'on lance un tel tétraèdre, une seule face est cachée et trois faces sont visibles).

1) Calculer la probabilité pour qu'au moins trois faces rouges soient visibles sur les trois tétraèdres.
2) Calculer la probabilité pour que la couleur bleue ne soit visible sur aucun tétraèdre.
3) Calculer la probabilité de l'évènement E « les six faces rouges sont visibles ».
4) On répète n fois l'expérience qui consiste à lancer les trois tétraèdres.
   Calculer la probabilité p_n pour que l'évènement E soit réalisé au moins une fois.
   Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Exercice III :

La réunion 2003

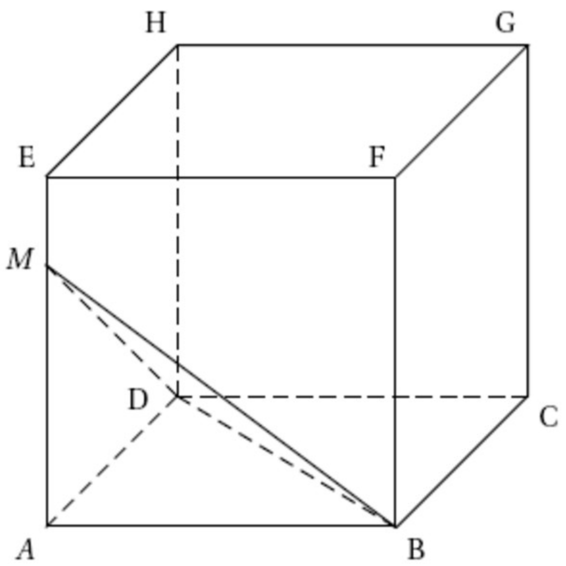
On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.
Le nombre a désigne un réel strictement positif.
On considère le point M de la demi-droite $[AE)$ défini par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AE}$.

1) Déterminer le volume du tétraèdre $ABDM$ en fonction de a.
2) Soit K le barycentre du système de points pondérés :

$$\left\{\left(M\,;\,a^2\right),\ (B\,;\,1),\ (D\,;\,1)\right\}.$$

   a) Exprimer $\overrightarrow{BK}$ en fonction de $\overrightarrow{BM}$ et de $\overrightarrow{BD}$.
   b) Calculer $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AD}$ puis en déduire l'égalité $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{MD} = 0$.
   c) Démontrer l'égalité $\overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$.
   d) Démontrer que K est l'orthocentre du triangle BDM.

3) Démontrer les égalités $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ et $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{MD} = 0$. Qu'en déduit-on pour la droite (AK) ?
4) a) Montrer que le triangle BDM est isocèle et que son aire est égale à $\dfrac{\sqrt{a^2+2}}{2a}$ unité d'aire.
   b) Déterminer le réel a tel que l'aire du triangle BDM soit égale à 1 unité d'aire. Déterminer la distance AK dans ce cas.



Exercice IV :

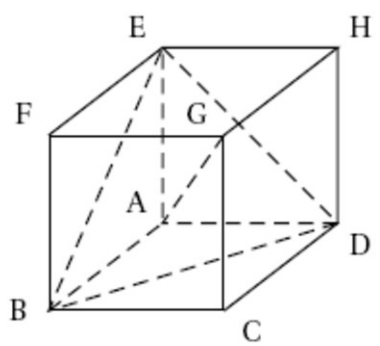
Nouvelle Calédonie 2004

On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-contre.

O_1 et O_2 sont les centres des carrés $ABCD$ et $EFGH$, et I est le centre de gravité du triangle EBD.

Soit m un nombre réel et G_m le barycentre du système de points pondérés :

$\{(E\,;\,1),\ (B\,;\,1-m),\ (G\,;\,2m-1),\ (D\,;\,1-m)\}$



Partie A

1) Justifier l'existence du point G_m.
2) Préciser la position du point G_1.
3) Vérifier que $G_0 = A$. En déduire que les points A, I et G sont alignés.
4) Démontrer que $\overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AO_2}$. En déduire l'ensemble des points G_m lorsque m parcourt l'ensemble des nombres réels.
5) a) Vérifier que les points A, G_m , E et O_1 sont coplanaires.
   b) Déterminer la valeur de m pour laquelle G_m se trouve sur la droite (EI).

Partie B

Dans cette question, l'espace est rapporté au repère orthonormal $(A\,;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1) Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (EBD). En déduire une équation cartésienne du plan (ABD).
2) Déterminer les coordonnées du point G_m.
3) Pour quelles valeurs de m, la distance de G_m au plan (EBD) est-elle égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$?

Exercice V :

Centre Etranger 2005

Soit $ABCD$ un tétraèdre tel que ABC, ABD et ACD soient trois triangles isocèles rectangles en A avec $AB = AC = AD = a$. On appelle A_1 le centre de gravité du triangle BCD.

1) Montrer que la droite (AA_1) est orthogonale au plan (BCD).
   $\left(\text{On pourra par exemple calculer } \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC}.\right)$
2) En exprimant de deux façons différentes le volume du tétraèdre $ABCD$, calculer la longueur du segment $[AA_1]$.
3) On appelle G l'isobarycentre du tétraèdre $ABCD$ et I le milieu de $[BC]$.
   a) Montrer que G appartient au segment $[AA_1]$ et déterminer la longueur AG.
   b) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|.$$

4) Soit H le symétrique de A par rapport à G.
   a) Démontrer que $4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$.
   b) Démontrer l'égalité $HC^2 - HD^2 = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BA}$.
   c) En déduire que $HC = HD$.

On rappelle que le volume d'une pyramide de hauteur h et d'aire de base associée b est

$$V = \frac{1}{3}bh.$$

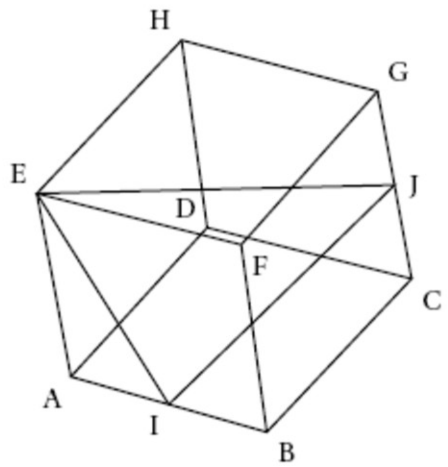
Exercice VI :

Nouvelle Calédonie nov 2004

Dans cet exercice, une réponse par « VRAI » ou « FAUX », sans justification, est demandée au candidat en regard d'une liste d'affirmations. Toute réponse conforme à la réalité mathématique donne 0,4 *point. Toute réponse erronée enlève* 0,1 *point. L'absence de réponse n'est pas comptabilisée. Le total ne saurait être négatif.*

On donne le cube $ABCDEFGH$, d'arête de longueur 1, et les milieux I et J des arêtes $[AB]$ et $[CG]$. Les éléments utiles de la figure sont donnés ci-contre.

Le candidat est appelé à juger chacune des 10 *affirmations suivantes.*



On utilisera pour répondre la feuille annexe, qui sera rendue avec la copie.

	Affirmation	VRAI ou FAUX
1.	$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}$	
2.	$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$	
3.	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IC}$	
4.	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = AB \times IC \times \cos \dfrac{\pi}{3}$	

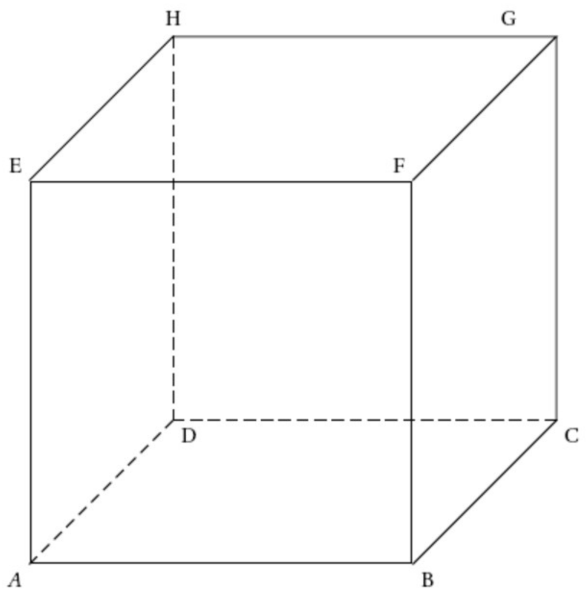
On utilise à présent le repère orthonormal $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

	Affirmation	VRAI ou FAUX
5.	Une représentation paramétrique de la droite (IJ) est : $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$, le paramètre t décrivant $\mathbb{R}$.	
6.	Une représentation paramétrique de la droite (IJ) est : $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t+1 \\ y = t+1 \\ z = \frac{1}{2}t+\frac{1}{2} \end{cases}$, le paramétre t décrivant $\mathbb{R}$	
7.	$6x - 7y + 8z - 3 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (IJ).	
8.	L'intersection des plans (FIJ) et (ABC) est la droite passant par I et par le milieu de l'arête $[DC]$.	
9.	Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (FIJ).	
10.	Le volume du tétraèdre $EFIJ$ est égal à $\frac{1}{6}$.	

Exercice VII :

Asie 2006

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous.



Dans l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE})$.

On note I le point de coordonnées $\left(\frac{1}{3} ; 1 ; 1\right)$.

1) Placer le point I sur la figure.
2) Le plan (ACI) coupe la droite (EH) en J. Démontrer que les droites (IJ) et (AC) sont parallèles.

3) On note R le projeté orthogonal de I sur la droite (AC).

   a) Justifier que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

      i) Il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AR} = k\overrightarrow{AC}$.

      ii) $\overrightarrow{IR} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

   b) Calculer les coordonnées du point R,

   c) En déduire que la distance IR s'exprime par $IR = \dfrac{\sqrt{11}}{3}$.

4) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(3\ ;\ -3\ ;\ 2)$ est normal au plan (ACI).
   En déduire une équation cartésienne du plan (ACI).

5) Démontrer que la distance du point F au plan (ACI) est $\dfrac{5}{\sqrt{22}}$.

Exercice VIII :

Pondichery 2006

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Partie A

(cette partie constitue une restitution organisée de connaissances)

Soit a, b, c et d des réels tels que $(a,\ b,\ c) \neq (0,\ 0,\ 0)$.
Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.

On considère le point I de coordonnées $(x_I,\ y_I,\ z_I)$ et le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(a,\ b,\ c)$.

Le but de cette partie est de démontrer que la distance de I au plan $\mathcal{P}$ est égale à

$$\frac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

1) Soit Δ la droite passant par I et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
   Déterminer, en fonction de $a,\ b,\ c,\ x_I,\ y_I$ et z_I, un système d'équations paramétriques de Δ.

2) On note H le point d'intersection de Δ et $\mathcal{P}$.

   a) Justifier qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{IH} = k\overrightarrow{n}$.

   b) Déterminer l'expression de k en fonction de $a,\ b,\ c,\ d,\ x_I,\ y_I$ et z_I.

   c) En déduire que $IH = \dfrac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Partie B

Le plan $\mathcal{Q}$ d'équation $x - y + z - 11 = 0$ est tangent à une sphère $\mathcal{S}$ de centre le point Ω de coordonnées $(1,\ -1,\ 3)$.

a) Déterminer le rayon de la sphère $\mathcal{S}$.

b) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par Ω et orthogonale au plan $\mathcal{Q}$

c) En déduire les coordonnées du point d'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{Q}$.

Exercice IX :

Centre étranger 2006

$ABCDEFGH$ est le cube d'arêete 1 représentée sur la figure ci-dessous qui sera complétée et rendue avec la copie.

L'espace est rapporté au repère orthonormal : $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE})$

Partie A. Un triangle et son centre de gravité.

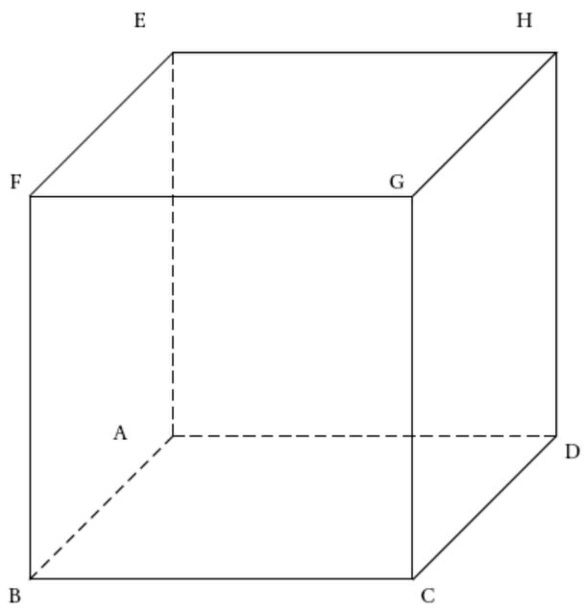
1) Démontrer que le triangle BDE est équilatéral.
2) Soit I le centre de gravité du triangle BDE.
   a) Calculer les coordonnées de I.
   b) Démontrer que $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AG}$. Que peut-on en déduire pour les points A, I, G ?
3) Prouver que I est le projeté orthogonal de A sur le plan (BDE).

Partie B. Une droite particulière

Pour tout nombre réel k, on définit deux points M_k et N_k, ainsi qu'un plan $\mathcal{P}_k$ de la façon suivante :

- M_k est le point de la droite (AG) tel que $\overrightarrow{AM_k} = k\overrightarrow{AG}$;
- $\mathcal{P}_k$ est le plan passant par M_k et parallèle au plan (BDE) ;
- N_k est le point d'intersection du plan $\mathcal{P}_k$ et de la droite (BC).

1) Identifier $\mathcal{P}_{\frac{1}{3}}$, $M_{\frac{1}{3}}$ et $N_{\frac{1}{3}}$ en utilisant des points déjà définis. Calculer la distance $M_{\frac{1}{3}}N_{\frac{1}{3}}$.
2) Calcul des coordonnées de N_k.
   a) Calculer les coordonnées de M_k dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.
   b) Déterniner une équation du plan $\mathcal{P}_k$ dans ce repère.
   c) En déduire que le point N_k a pour coordonnées $(1\ ;\ 3k-1\ ;\ 0)$.
3) Pour quelles valeurs de k la droite (M_kN_k) est-elle orthogonale à la fois aux droites (AG) et (BC) ?
4) Pour quelles valeurs de k la distance M_kN_k est-elle minimale ?
5) Tracer sur la figure donnée ci-dessous, la section du cube par le plan $\mathcal{P}_{\frac{1}{2}}$. Tracer la droite $\left(M_{\frac{1}{2}}N_{\frac{1}{2}}\right)$ sur la même figure.



Exercice X :

France 2006

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace.
On considère les points

$$A(2\ ;\ 4\ ;\ 1),\ B(0\ ;\ 4\ ;\ -3),\ C(3\ ;\ 1\ ;\ -3),\ D(1\ ;\ 0\ ;\ -2), E(3\ ;\ 2\ ;\ -1), I\left(\frac{3}{5}\ ;\ 4\ ;\ -\frac{9}{5}\right)$$

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, dire, sans le justifier, si elle est vraie ou si elle est fausse. Pour chaque question, il est compté un point si la réponse est exacte et zéro sinon.

1) Une équation du plan (ABC) est : $2x + 2y - z - 11 = 0$.
2) Le point E est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).
3) Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
4) La droite (CD) est donnée par la représentation paramétrique suivante :

$$(CD)\quad \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

5) Le point I est sur la droite (AB).

Exercice XI :

La Réumion 2006

Pour chacune des questions 1, 2, 3 et 4, ***parmi les quatre affirmations proposées, deux sont exactes et deux sont fausses****. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et les deux affirmations qu'il pense exactes. Aucune justification n'est demandée. Les quatre questions sont indépendantes et sont notées sur* 1 *point. Toute réponse juste rapporte* 0,5 *point. Donner plus de* 2 *réponses à une question entraîne la nullité de la question.*

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

1) Soit P le plan d'équation $2x + 3y + 4z - 1 = 0$.
   a) La distance du point O au plan P est égale à 1.
   b) La distance du point O au plan P est égale à $\dfrac{1}{\sqrt{29}}$.
   c) Le vecteur $\overrightarrow{n}\left(1\ ;\ \dfrac{3}{2}\ ;\ 2\right)$ est un vecteur normal au plan P.
   d) Le plan Q d'équation $-5x + 2y + z = 0$ est parallèle au plan P.
2) On désigne par P le plan d'équation $2x + y - z = 0$, et par D la droite passant par le point $A(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\ (1\ ;\ -4\ ;\ -2)$.
   a) La droite D est parallèle au plan P.
   b) La droite D est orthogonale au plan P.
   c) La droite D est sécante avec le plan P.
   d) Un système d'équations paramétriques de D est $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

3) On désigne par E l'ensemble des points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que : $x+y+z=3$ et $2x-z=1$. Soit le point A$(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.
   a) L'ensemble E contient un seul point, le point A.
   b) L'ensemble E est une droite passant par A.
   c) L'ensemble E est un plan passant par A.
   d) L'ensemble E est une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(1\ ;\ -3\ ;\ 2)$.
4) $ABCD$ est un tétraèdre quelconque. Soit P le plan passant par A et orthogonal à la droite (BC).
   a) Le plan P contient toujours le point D.
   b) Le plan P contient toujours la hauteur (AH) du triangle ABC.
   c) Le plan P est toujours l'ensemble des points M de l'espace tels que :

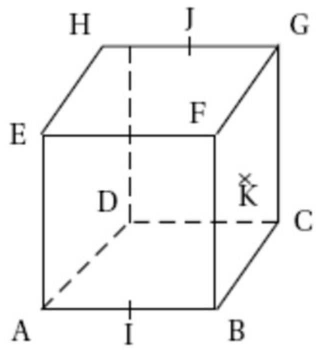
$$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}.$$

   d) Le plan P est toujours le plan médiateur du segment $[BC]$.

Exercice XII :

Antilles Guyane sept 2006

Dans un cube $ABCDEFGH$, on désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[GH]$. K désigne le centre de la face $BCGE$. Les calculs seront effectués dans le repère orthonormal $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.



1) a) Démontrer que le quadrilatère $DIFJ$ est un parallélogramme.
   Établir que $DIFJ$ est en fait un losange et montrer que l'aire de ce losange est égale à $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.
   b) Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (DIJ).
   En déduire une équation cartésienne de ce plan.
   c) Déterminer la distance du point E au plan (DIJ), puis calculer le volume de la pyramide $EDIFJ$. On rappelle que le volume V d'une pyramide de hauteur h et de base correspondante $\mathcal{B}$ est donné par la formule suivante $V=\dfrac{1}{3}\times\mathcal{B}\times h$.
2) Soit (Δ) la droite passant par E et orthogonale au plan (DIJ)

a) Donner une représentation paramétrique de (Δ) et prouver que K est un point de (Δ).

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection L de (Δ) et du plan (DIJ).

c) Vérifier que L est le centre de gravité du triangle BEG.

3) Soit (S) l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - x + \dfrac{4}{3} = 0$.

a) Vérifier que (S) est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

b) Montrer que L est un point de (S), Quelle propriété géométrique relative à (S) et au plan (DIJ) peut-on déduire de ce dernier résultat ?

Exercice XIII :

Antilles Guyane 2007

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On considère les points $A(3\ ;\ 0\ ;\ 6)$ et $I(0\ ;\ 0\ ;\ 6)$, et l'on appelle (D) la droite passant par A et I.

On appelle (P) le plan d'équation $2y+z-6 = 0$ et (Q) le plan d'équation $y-2z+12 = 0$.

1) Démontrer que (P) et (Q) sont perpendiculaires.

2) Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est la droite (D).

3) Démontrer que (P) et (Q) coupent l'axe $\left(O\ ;\ \vec{\jmath}\right)$ et déterminer les coordonnées des points B et C, intersections respectives de (P) et (Q) avec l'axe $\left(O\ ;\ \vec{\jmath}\right)$.

4) Démontrer qu'une équation du plan (T) passant par B et de vecteur normal $\overrightarrow{AC}$ est

$$x + 4y + 2z - 12 = 0.$$

5) Donner une représentation paramétrique de la droite (OA).
Démontrer que la droite (OA) et le plan (T) sont sécants en un point H dont on déterminera les coordonnées.

6) Que représente le point H pour le triangle ABC ? Justifier.