Correction contrôle de mathématiques

Du jeudi 05 avril 2012

Exercice 1

ROC **(3 points)**

1) voir dans le cours ou sur le site :
http://www.lyceedadultes.fr/sitepedagogique/documents/math/mathTermS/13_Revisions/ROC.pdf

2) **Application :** compléter le triangle de Pascal puis développer et simplifier l'expression suivante :

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

$$\begin{aligned}(2+i)^5 &= 2^5 + 5\times 2^4\, i + 10\times 2^3\, i^2 + 10\times 2^2\, i^3 + \\ &\qquad 5\times 2\, i^4 + i^5\\ &= 32 + 80i - 80 - 40i + 10 + i\\ &= -38 + 41i\end{aligned}$$

Exercice 2

QCM **(8 points)**

1) Loi équirépartie. Combinaison avec un univers de 8 éléments

a) La probabilité de tirer 3 boules noires est : **réponse A**

$$P_a = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{1}{\frac{8\times7\times6}{3\times2}} = \frac{1}{56}$$

b) La probabilité de tirer 3 boules de la même couleur est : **réponse A**

$$P_b = \frac{\binom{5}{3}+\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{10+1}{56} = \frac{11}{56}$$

2) Loi équirépartie. pliste avec un univers de 8 éléments

a) La probabilité d'obtenir 5 fois une boule noire est : **réponse B**

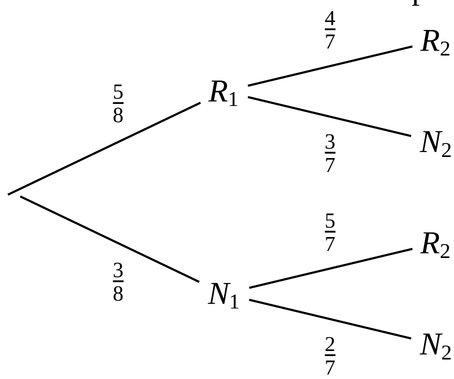
$$P_a = \left(\frac{3}{8}\right)^5$$

b) La probabilité d'obtenir 2 boules noires et 3 boules rouges est : **réponse C**

On choisit l'emplacement des boules noires, on en prend 2 puis 3 boules rouges

$$P_b = \binom{5}{3}\times\left(\frac{3}{8}\right)^2\left(\frac{5}{8}\right)^3 = 10\times\left(\frac{3}{8}\right)^2\left(\frac{5}{8}\right)^3$$

3) Construisons l'arbre pondéré associé à cette troisième expérience aléatoire :



a) La probabilité conditionnelle $P_{R_1}(R_2)$ est : **réponse B**

$$P_{R_1}(R_2) = \frac{4}{7}$$

b) La probabilité de l'évènement $R_1 \cap N_2$ est : **réponse C**

$$P(R_1 \cap N_2) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$$

c) La probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage est : **réponse A**

$$P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(N_1 \cap R_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{20+15}{56} = \frac{5}{8}$$

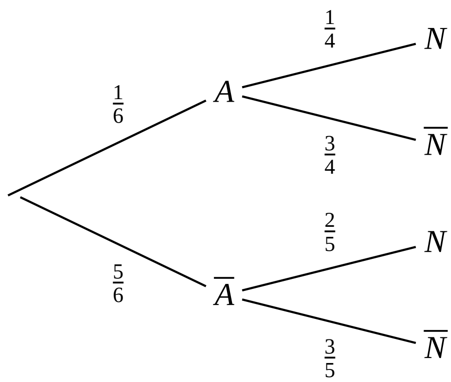
d) La probabilité de tirer une boule rouge au premier tirage sachant qu'on a obtenu une boule noire au second tirage est : **réponse C**

$$P_{N_2}(R_1) = \frac{P(R_1 \cap N_2)}{P(N_2)} = \frac{P(R_1 \cap N_2)}{1 - P(R_2)} = \frac{\frac{15}{56}}{\frac{3}{8}} = \frac{5}{7}$$

Exercice 3

Urnes et dé **(5 points)**

1) a) Construisons l'arbre pondéré traduisant cettte expérience aléatoire :



b) On prend les deux chemins possibles pour obtemir une boule noire :

$$P(N) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{24} + \frac{1}{3} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

c) On calcule :

$$P_N(A) = \frac{P(A \cap N)}{P(N)} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{24} \times \frac{8}{3} = \frac{1}{9}$$

2) Nous somme dans les conditions de l'hypothèse de Bernouilli : n expériences indépendantes et 2 éventualités (on gagne ou on perd). La loi de probabilité de X suit la loi binomiale $b\left(10, \frac{3}{8}\right)$.

a) La probabilité de gagner exactement trois parties :

$$P(X = 3) = \binom{10}{3}\left(\frac{3}{8}\right)^3\left(\frac{5}{8}\right)^7 = \frac{120 \times 3^3 \times 5^7}{8^{10}} \simeq 0,236$$

b) La probabilité de gagner au moins une partie. On passe par l'événement contraire : ne gagner aucune partie. On a alors :

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^{10} \simeq 0,991$$

Exercice 4

Domino **(4 points)**

1) Montrer que l'on peut ainsi créer 36 dominos.
On a 8 doubles puis le nombre de combinaisons de 2 parmi 8 d'où :

$$8 + \binom{8}{2} = 8 + \frac{8 \times 7}{2} = 8 + 28 = 36$$

2) Pour trouver les dominos avec des chiffres pairs, dans l'ensemble $E' = \{0, 2, 4, 6\}$, on a 4 doubles et le nombre de combinaisons de 2 parmi 4. On obtient alors :

$$P(2) = \frac{4 + \binom{4}{2}}{36} = \frac{4 + 6}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

3) On tire au hasard et simultanément deux dominos.
Cette affirmation est vrai : Il faut choisir un double soit 8 choix et pour un double donné, il y a 7 dominos simples dont l'un des chiffres est celui du domino double. On a donc :

$$P(3) = \frac{8 \times 7}{\binom{36}{2}} = \frac{8 \times 7}{\frac{36 \times 35}{2}} = \frac{8 \times 7 \times 2}{36 \times 35} = \frac{4}{45}$$