Correction contrôle de mathématiques

Jeudi 18 octobre 2012

Exercice 1

ROC **3 points**

1) Soit donc une suite (u_n) croissante et non majorée.

(u_n) n'est pas majorée, donc pour tout intervalle $]A; +\infty[$,

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que :} \quad u_N \in]A; +\infty[$$

Comme (u_n) est croissante, on a :

$$\forall n > N \quad \text{alors} \quad u_n > u_N$$

Donc :

$$\forall n > N \quad \text{alors} \quad u_n \in]A; +\infty[$$

donc à partir d'un certain rang tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]A; +\infty[$. La suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

2) **Application :**

a) $u_{n+1} - u_n = 2(n+1)$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2(n+1) > 0$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n > 0$. La suite est donc strictement croissante.

b) Soit $\mathcal{P}$: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant n^2$

Initialisation : immédiat $u_0 = 0 \geqslant 0^2$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie

Hérédité : On admet que $u_n \geqslant n^2$, montrons alors que $u_{n+1} \geqslant (n+1)^2$. On a d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_n + 2(n+1) &\geqslant n^2 + 2n + 2 \\ u_{n+1} &\geqslant (n^2 + 2n + 1) + 1 \\ u_{n+1} &\geqslant (n+1)^2 \end{aligned}$$

La propostion $\mathcal{P}$ est héréditaire.

Par initialisation et hérédité, la proposition $\mathcal{P}$ est vraie

c) La suite (u_n) est croissante et non majorée donc la suite(u_n) est divergente vers $+\infty$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} = +\infty$

Exercice 2

Récurrence **2 points**

Soit $\mathcal{P}$: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n = \dfrac{n}{n+1}$

Initialisation : $t_0 = 0$ et $\dfrac{0}{0+1} = 0$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie

Hérédité : On admet que $t_n = \dfrac{n}{n+1}$, montrons alors que $t_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$. On a d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
t_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\\
t_{n+1} &= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}\\
t_{n+1} &= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}\\
t_{n+1} &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}\\
t_{n+1} &= \frac{n+1}{n+2}
\end{aligned}$$

La propostion $\mathcal{P}$ est héréditaire.

Par initialisation et hérédité, la proposition $\mathcal{P}$ est vraie.

Exercice 3

Limites de suites **3 points**

1) Pour $n \geqslant 1$ on a : $u_n = n^2\left(2 - \dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2 - \frac{1}{n} = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par produit}\\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\left(2-\frac{1}{n}\right) = +\infty\end{array}$$

De $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, par somme, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

2) Pour $n \geqslant 1$ on a : $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n\left(1+\dfrac{2}{n}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{n}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)}$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{2}{n} = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par produit}\\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(1+\frac{2}{n}\right) = +\infty\end{array}$$

Par quotient, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

3) Pour $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{gathered}
-1 \leqslant \sin n \leqslant 1\\
-\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{\sin n}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}\\
4 - \frac{1}{n^2} \leqslant 4 + \frac{\sin n}{n^2} \leqslant 4 + \frac{1}{n^2}
\end{gathered}$$

or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 4 - \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} 4 + \frac{1}{n^2} = 4$

D'après le théorème des gendarmes, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$

EXERCICE 4

Vrai-Faux **4 points**

1) **Faux** Pour s'en convaincre : soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n}$.

   Tous les termes de (u_n) sont non nuls et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. La suite (u_n) converge vers 0.

   or $v_n = -\dfrac{2}{u_n} = -2n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$. La suite (v_n) diverge.

2) **Vrai** Pour s'en convaincre : Si (u_n) est minorée par 2, on a :

$$u_n \geqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{u_n} \leqslant \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{2}{u_n} \geqslant -1 \quad \Leftrightarrow \quad v_n \geqslant -1$$

   (v_n) est donc minorée par -1

3) **Faux** Pour s'en convaincre : si (u_n) est décroissante (sans changer de signe) on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{u_{n+1}} > \frac{1}{u_n} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{2}{u_{n+1}} < -\frac{2}{u_n} \quad \Leftrightarrow \quad v_{n+1} < v_n$$

   La suite (v_n) est donc décroissante.

   On peut reprendre le contre-exemple précédent : $u_n = \dfrac{1}{n}$ (décroissante) donc $v_n = -2n$ qui est aussi décroissante.

4) **Faux** Pour s'en convaincre, soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$.

   Les termes de la suite u_n prennent donc alternativement les valeurs 1 et -1. La suite (u_n) est donc divergente.

   or $v_n = -\dfrac{2}{u_n} = -\dfrac{2}{(-1)^n} = (-2)^{n+1}$. Les termes de la suite (v_n) prennent donc alternativement les valeurs -2 et 2. La suite (v_n) diverge

EXERCICE 5

D'après Pondichéry avril 2008 **4 points**

1) f est une fonction du second degré qui s'annule en 0 et 20, donc f admet un extremum au centre de 0 et 20 soit en $x = 10$. De plus le coefficient devant x^2 est $\frac{-1}{10}$, donc cet extremum est un maximum. On a donc :

   - Sur $[0, 10]$ la fonction f est croissante
   - Sur $[10, 20]$ la fonction f est décroissante.
   - $f(10) = 10$

2) Soit $\mathcal{P}$: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.

   Initialisation : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1,9$, donc on a : $0 \leqslant u_1 \leqslant u_1 \leqslant 10$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie

   Hérédité : On admet que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$, montrons alors que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 10$.

   On a d'après l'hypothèse de récurrence :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$$

Comme la fonction f est croissante sur $[0, 10]$, on a :

$$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(10)$$
$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 10$$

La propostion $\mathcal{P}$ est héréditaire.

Par initialisation et hérédité, la proposition $\mathcal{P}$ est vraie.

3) La suite (u_n) est croissante et majorée par 10, elle est donc convergente vers une limite ℓ.

4) La limite ℓ doit vérifier : $f(\ell) = \ell$. on a donc ($\ell \neq 0$ car $u_0 = 1$ et (u_n) croissante)

$$\frac{1}{10}\ell(20-\ell) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad 20-\ell = 10 \quad \Leftrightarrow \quad \ell = 10$$

La suite (u_n) converge vers 10.

En 2015, $n = 10$ la suite sera très proche de sa limite $u_{10} \simeq 10$, il y aura donc 10 millions de foyers français équipés d'un téléviseur à écran plat.

Exercice 6

Algorithme **4 points**

1) Le rôle de cet algoritme est de déterminer le naturel k tel que $u_k > \text{A}$, A étant un réel donné.

2) On trouve les résultats suivants (en rajoutant 1 000 très long avec la calculatrice) :

A	10	50	100	1 000
k	33	662	2 574	250 731

3) Les résultats infirme les affirmations de Paul, car pourvu que k soit suffisant grand, u_k dépasse 10, 50 et 100 (et 1000). On peut penser que la suite (u_n) n'est pas majorée et qu'elle diverge vers $+\infty$.

4) On a : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

Comme pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \overbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}^{n \text{ termes}}$$

soit $u_n \geqslant \dfrac{n}{\sqrt{n}} \quad \Leftrightarrow \quad u_n \geqslant \sqrt{n}$

5) On sait que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc par comparaison on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$