Correction contrôle de mathématiques
Du lundi 10 décembre 2012

Exercice 1

ROC **(4 points)**

1) On détermine les variation de φ : $\varphi'(x) = e^x - x$

or $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x - x > 0$. La fonction φ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$x \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(x) \geqslant \varphi(0) \quad \text{or} \quad \varphi(0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(x) \geqslant 1$$

2) $\varphi(x) \geqslant 1 > 0$ pour $x > 0$. On a donc :

$$e^x > \frac{x^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$$

or $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ donc par comparaison : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

3) a) On pose : $X = \dfrac{1}{2}x$. Donc si $x \to +\infty$ alors $X \to +\infty$

On a donc : $\dfrac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x} = Xe^{-X} = \dfrac{X}{e^X}$. Donc par quotient de la limite du 2), on obtient :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - \dfrac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{4}(2 - x)e^{-\frac{x}{2}}$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-\frac{x}{2}} > 0$, on a :

- $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$
- Le signe de $f'(x)$ est le signe de $2 - x$

On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

Exercice 2

Tangente passant par l'origine **(6 points)**

Partie A : étude de la fonction

1) Limite de f en $-\infty$: $f(x) = \dfrac{xe^x}{e} + 1$

or $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ donc, par quotient et somme, on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale d'équation : $y = 1$

2) Limite de f en $+\infty$. Pas de forme indéterminée, par produit, quotient et somme de limites, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

3) $f'(x) = e^{x-1} + xe^{x-1} = (x+1)e^{x-1}$

4) Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{x-1} > 0$, on a :

- $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$
- Le signe de $f'(x)$ est le signe de $(x+1)$.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$1 - e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B : recherche d'une tangente particulière

1) La tangente à $\mathcal{C}$ en a : T_a a pour équation :

$$\begin{aligned} y &= f'(x)(x-a) + f(a) \\ &= (a+1)e^{a-1}(x-a) + ae^{a-1} + 1 \\ &= (a+1)e^{a-1}\,x + a(1-a-1)\,e^{a-1} + 1 \\ &= (a+1)e^{a-1}\,x - a^2\,e^{a-1} + 1 \end{aligned}$$

On pose $b = -a^2\,e^{a-1} + 1$

2) T_a passe par l'origine si, et seulement si, l'équation de la droite T_a a son ordonnée à l'origine b nulle. On a donc : $1 - a^2\,e^{a-1} = 0$

3) On pose la fonction g définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = -x^2\,e^{x-1} + 1$

On étudie la fonction g sur $[0; +\infty[$. on a :

$$g'(x) = -2xe^{x-1} - x^2\,e^{x-1} = -x(x+2)\,e^{x-1}$$

or si $x > 0$, $x + 2 > 0$ et $e^{x-1} > 0$ donc $g'(x) < 0$

g est donc strictement décroissante sur $]0; +\infty[$. On a : $g(0) = 1$ et :

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} -x^2 &= -\infty \\ \lim_{x \to +\infty} e^{x-1} &= +\infty \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{Par produit et somme} \\ &\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \end{aligned}$$

On a donc : $g(]0; +\infty[) =]-\infty; 1[$

La fonction g est continue (car dérivable), monotone (décroissante) et $0 \in g(]0;+\infty[)$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution sur $]0;+\infty[$ à l'équation $g(x) = 0$.

or $g(1) = 0$ donc 1 est l'unique solution de $g(x) = 0$ sur $]0,+\infty[$.

4) On a l'équation $T_1 : y = 2x$

Exercice 3

Suite **(7,5 points)**

Partie A

1) $g'(x) = e^x - 1$ et $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $g'(x) > 0$ si $x > 0$.

Le fonction g est donc strictement croissante sur $[0;+\infty[$

2) $g(0) = 0$ comme g est croissante sur $[0;+\infty[$, donc la fonction g est positive si $x > 0$

3) Comme $g(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant 0$, on a $e^x - x \geqslant 1 > 0$.

Partie B

1) Comme f est strictement croissante sur $[0\,;1]$: $0 \leqslant x \leqslant 1 \Leftrightarrow f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$

or $f(0) = 0$ et $f(1) = \dfrac{e-1}{e-1} = 1$ donc $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$

La fonction f est stable sur $[0\,;1]$.

2) a) On a :

$$\begin{aligned}
f(x) - x &= \frac{e^x - 1}{e^x - x} - x \\
&= \frac{e^x - 1 - xe^x + x^2}{e^x - x} \\
&= \frac{e^x(1-x) + x^2 - 1}{e^x - x} \\
&= \frac{e^x(1-x) + (x-1)(x+1)}{e^x - x} \\
&= \frac{e^x(1-x) - (1-x)(x+1)}{e^x - x} \\
&= \frac{(1-x)(e^x - x - 1)}{e^x - x} \\
&= \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}
\end{aligned}$$

b) Si $x \in]0;1[$ on a : $1 - x > 0$, $g(x) > 0$, $e^x - x > 0$

Donc si $x \in]0;1[$ $f(x) - x > 0$. La courbe (C) est donc au dessus de la droite (D). La droite (D) coupe (C) en 0 et 1 car $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Partie C

1) Cf annexe

2) Soit P_n : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. Montrons P_n par récurrence :

- **Initialisation :** on a $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_1 = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

  or f est croissante et stable dans $[0, 1]$, donc $\dfrac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$. P_0 est vraie.

- **Hérédité :** On suppose que : $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. Comme la fonction f est croissante et stable sur $[0; 1]$, on a :

  $$f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$$

  P_n est héréditaire.

Par initialisation et hérédité, la proposition P_n est vrai pour tout entier naturel n.

3) La suite (u_n) est croissante ($u_n \leqslant u_{n+1}$) et majorée par 1, donc la suite (u_n) est convergente. Comme la fonction f est continue sur $[0; 1]$, d'après le théorème du point fixe, la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie : $\ell = f(\ell)$.

De plus de la partie B, on sait que l'équation $f(x) - x = 0$ sur $[0\,;1]$ admet comme solution 0 et 1. Comme $\ell \geqslant \dfrac{1}{2}$, on a $\ell = 1$.

Exercice 4

Fonction logistique **(2,5 points)**

1) On multiplie le numérateur et dénominateur par : $e^{-\frac{x}{4}}$. On a alors :

$$f(x) = \frac{3e^{\frac{x}{4}} \times e^{-\frac{x}{4}}}{2e^{-\frac{x}{4}} + e^{\frac{x}{4}} \times e^{-\frac{x}{4}}} = \frac{3}{1 + 2e^{-\frac{x}{4}}}$$

2) - Limite en $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{x}{4} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Par composition} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\frac{x}{4}} = 0\end{array}$$

Par somme et quotient : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

- Limite en $-\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{x}{4} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Par composition} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-\frac{x}{4}} = +\infty\end{array}$$

Par somme et quotient : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

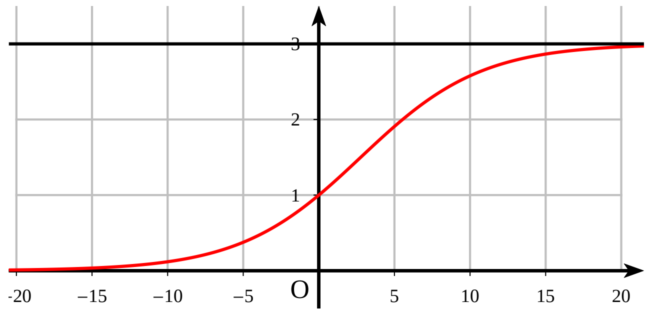
3) On dérive avec la forme de la question 1).

$$f'(x) = \frac{-3 \times 2 \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) e^{-\frac{x}{4}}}{\left(1 + 2e^{-\frac{x}{4}}\right)^2} = \frac{3e^{-\frac{x}{4}}}{2\left(1 + 2e^{-\frac{x}{4}}\right)^2}$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-\frac{x}{4}} > 0$, on a $f'(x) > 0$.

La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}$

Les courbes des fonctions logistiques ont la forme d'un "s". On obtient la représentation suivante de la fonction f :



ANNEXE