Correction contrôle de mathématiques

Du jeudi 04 avril 2013

EXERCICE 1

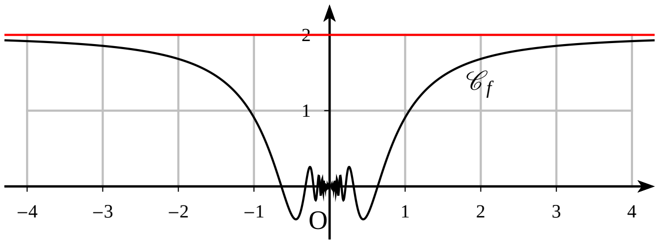
ROC **(3 points)**

1) D'après la définition du nombre dérivé en 0, on a :

$$\sin' 0 = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h - \sin 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \quad \text{or} \quad \sin' 0 = \cos 0 = 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

$$\cos' 0 = \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - \cos 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \quad \text{or} \quad \cos' 0 = -\sin 0 = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

2) a) On obtient l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ suivantes :



On conjecture alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

b) On a : $f(x) = \dfrac{2}{h} \sin h = 2 \times \dfrac{\sin h}{h}$

c) Si $x \to +\infty$ alors $h \to 0$, on a donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{h\to 0} 2 \times \frac{\sin h}{h} = 2 \quad \text{d'après le 1)}$$

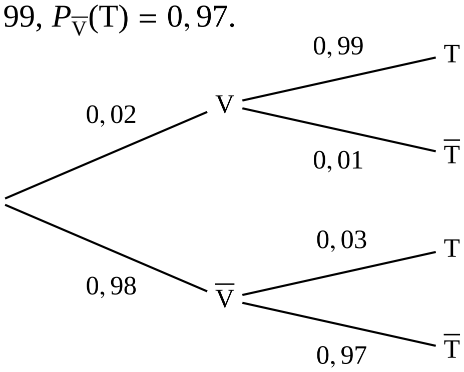
EXERCICE 2

Virus et test **(7 points)**

Partie A

1) a) On a : $P(\mathrm{V}) = 0.02$, $P_{\mathrm{V}}(\mathrm{T}) = 0,99$, $P_{\overline{\mathrm{V}}}(\overline{\mathrm{T}}) = 0,97$.

On obtient l'arbre suivant :



b) $P(\mathrm{V} \cap \mathrm{T}) = P(\mathrm{V}) \times P_{\mathrm{V}}(\mathrm{T}) = 0,02 \times 0,99 = 0,0198$.

2) $P(\mathrm{T}) = P(\mathrm{V} \cap \mathrm{T}) + P(\overline{\mathrm{V}} \cap \mathrm{T}) = 0,0198 + 0,98 \times 0,03 = 0,0492$

3) a) On a : $P_T(\mathrm{V}) = \dfrac{\mathrm{V} \cap \mathrm{T}}{P(\mathrm{T})} = \dfrac{0,0198}{0,0492} \simeq 0,4024$

Il y a donc 40 % de chance que la personne soit contaminée si le test est positif.

b) $P_{\overline{\mathrm{T}}}(\overline{\mathrm{V}}) = \dfrac{P(\overline{\mathrm{V}} \cap \overline{\mathrm{T}})}{P(\overline{\mathrm{T}})} = \dfrac{P(\overline{\mathrm{V}}) \times P_{\overline{\mathrm{V}}}(\overline{\mathrm{T}})}{1 - P(\mathrm{T})} = \dfrac{0,98 \times 0,97}{1 - 0,0492} \simeq 0,9998$

Si le test est négatif, on est « quasi » sûr (99,98 %) que la personne n'est pas contaminée. Pas de faux négatif.

Partie B

1) X suit une loi binomiale car on choisit, de façon indépendante, 10 personnes et l'on s'intéresse à la contamination ($p = 0,02$) ou non d'une personne. X suit donc la loi $\mathscr{B}(10; 0,02)$.

2) $P(\mathrm{X} \geqslant 2) = 1 - P(\mathrm{X} \leqslant 1) \simeq 0,0162$

Exercice 3

Ascenseur ou escalier **(8 points)**

1) On obtient la tableau suivant :

	N_1	N_2	N_3	Total
E	50	25	0	75
$\overline{\mathrm{E}}$	50	75	100	225
Total	100	100	100	300

2) a) $P(\mathrm{N}_2 \cap \mathrm{E}) = \dfrac{25}{300} = \dfrac{1}{12}$

b) On a : $P(\mathrm{N}_1) = P(\mathrm{N}_2) = P(\mathrm{N}_3) = \dfrac{100}{300} = \dfrac{1}{3}$

c) $P_{\mathrm{N}_2}(\mathrm{E}) = \dfrac{P(\mathrm{N}_2 \cap \mathrm{E}}{P(\mathrm{N}_2} = \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{4}$

3) a) X suit une loi binomiale car on intérroge de façon indépendante 20 personnes et l'on demande à chaque personne si elle va au 2e niveau ($\frac{1}{3}$) ou non. X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}\left(20, \dfrac{1}{3}\right)$.

b) $P(\mathrm{X} = 5) = \dbinom{20}{5} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^5 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{15} \simeq 0,1457.$

c) $E(\mathrm{X}) = np = 20 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{20}{3} \simeq 7$

7 personnes en moyenne vont au 2e niveau.

4) On veut : $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X = 0) \geqslant 0,99 \quad \Leftrightarrow \quad P(X = 0) \leqslant 0,01$

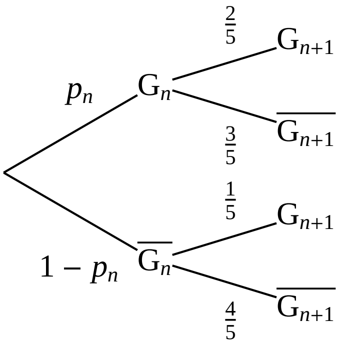
On a alors : $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \leqslant 0,01 \quad \Leftrightarrow \quad n \ln \dfrac{2}{3} \leqslant \ln 0,01 \quad \Leftrightarrow \quad n \geqslant \dfrac{\ln 0,01}{\ln \dfrac{2}{3}} \simeq 11,35$

Le plus petit entier n est donc 12.

Exercice 4

Jeu en ligne **(3 points)**

1) On a :



2) $p_{n+1} = P(G_n \cap G_{n+1}) + P(\overline{G_n} \cap G_{n+1}) = \dfrac{2}{5} p_n + \dfrac{1}{5}(1 - p_n) = \dfrac{2}{5} p_n + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{5} p_n = \dfrac{1}{5} p_n + \dfrac{1}{5}$

3) a) $u_{n+1} = p_{n+1} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{5} p_n + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{5} p_n - \dfrac{1}{20} = \dfrac{1}{5}\left(p_n - \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{5} u_n$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{5}$.

Le suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{5}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \dfrac{1}{4} = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

b) On a donc $u_n = u_1\, q^{n-1} = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$ donc $p_n = u_n + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} + \dfrac{1}{4}$

c) On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{5} < 1$

Par produit et somme $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{1}{4}$