Correction devoir du 04 novembre 2013

Exercice I

Étude d'une fonction **6 points**

1) Les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$ sont indéterminées. On change donc la forme de $f(x)$

$$f(x) = \frac{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)} = \frac{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$$

On a alors :

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2} &= 1\\ \lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} &= 1\end{aligned}\right\} \quad \text{Par quotient} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

De la même façon, on montre que : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$ et $-\infty$

2) f est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant avec la forme $\dfrac{u}{v}$, on obtient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+1)(x^2+x-1)-(2x+1)(x^2+x-1)}{(x^2+x+1)^2}\\ &= \frac{(2x+1)(x^2+x+1-x^2-x+1)}{(x^2+x+1)^2}\\ &= \frac{2(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}\end{aligned}$$

3) Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2+x+1)^2 > 0,\ f'(x)$ est du signe de $(2x+1)$

$$f'(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x+1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = -\frac{1}{2}$$

On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\frac{5}{3}$	$\nearrow$	1

Avec la *TI 82 stats* pour avoir la valeur du minimum de la fonction, on tape $Y_1(-1/2) \blacktriangleright Frac$, en ayant rentrer la fonction Y_1.

4) On détermine les intersections de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses en résolvant :

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 1 = 0$$

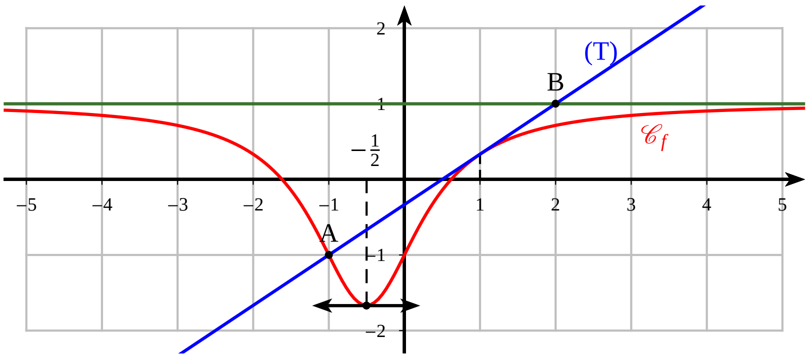
On détermine $\Delta = 1 + 4 = 5$, on obtient les deux solutions :

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \simeq 0,62 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \simeq -1,62$$

5) L'équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}_f$ en $x = 1$:

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{2}{3}(x-1) + \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

6) La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale en $x = -\frac{1}{2}$. Pour tracer la tangente (T), on peut prendre les points A$(-1;-1)$ et B$(2,1)$. On obtient alors la représentation suivante :



Exercice II

Vrai-Faux **4 points**

a) **Faux**, comme $\forall x \in \mathbb{R}, \; x^2 + 1 > 0$, on a :

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{1+x^2} \leqslant \frac{\cos x}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$, d'après le théorème des gendarmes, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} = 0$$

b) **Faux**, on change la forme de : $1 - |x-1|$, on a :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\lvert x-1 \rvert$	$-x+1$	0	$x-1$

Donc pour $x < 0$, on a : $1 - |x-1| = 1 - (-x+1) = x$, d'où :

$$\lim_{x\to-\infty} 1 - |x-1| = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

c) **Faux**, on a une forme indéterminée "$\dfrac{0}{0}$". On multiplie alors par la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x} &= \frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}\\ &= \frac{2+x-2+x}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}\\ &= \frac{2x}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}\\ &= \frac{2}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}\end{aligned}$$

or $\lim\limits_{x\to 0} 2+x = \lim\limits_{x\to 0} 2-x = 2$ et $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x} = \sqrt{2}$

Par composition, on a alors : $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{2+x}+\sqrt{2-x} = 2\sqrt{2}$

Par quotient, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) **Vrai**, on a une forme indéterminée "$\dfrac{0}{0}$", on factorise et on simplifie :

Les racine de x^2-x-6 sont $x_1=-2$ et $x_2=3$, on a alors :

$$\frac{x^2-4}{x^2-x-6} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \frac{x-2}{x-3}$$

or $\lim\limits_{x\to -2} x-2 = -4$ et $\lim\limits_{x\to -2} x-3 = -5$

Par quotient, on a alors : $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-6} = \dfrac{4}{5}$

Exercice III

Dérivée **4 points**

1) $f_1(x) = \dfrac{2x}{x^2-9}$ forme $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f_1{}'(x) = \frac{2(x^2-9)-4x^2}{(x^2-9)^2} = \frac{2x^2-18-4x^2}{(x^2-9)^2} = \frac{-2x^2-18}{(x^2-9)^2} = \frac{-2(x^2+9)}{(x^2-9)^2}$$

2) $f_2(x) = x\sqrt{x+3}$ forme $(uv)' = u'v+uv'$

$$f_2{}'(x) = \sqrt{x+3}+\frac{x}{2\sqrt{x+3}} = \frac{2(x+3)+x}{2\sqrt{x+3}} = \frac{3x+6}{2\sqrt{x+3}} = \frac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$$

3) $f_3(x) = 2x+1+\dfrac{2}{x-3}$ forme $(u+v)' = u'+v'$ et $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$

$$f_3{}'(x) = 2-\frac{2}{(x-3)^2} = \frac{2(x-3)^2-2}{(x-3)^2} = \frac{2\left[(x-3)^2-1\right]}{(x-3)^2} = \frac{2(x-4)(x-2)}{(x-3)^2}$$

4) $f_4(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{x+3}$ forme $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ et $(uv)' = u'v + uv'$

$$f_4{}'(x) = \frac{\left(\sqrt{x} + \dfrac{x}{2\sqrt{x}}\right)(x+3) - x\sqrt{x}}{(x+3)^2} = \frac{(2\sqrt{x} + \sqrt{x})(x+3) - 2x\sqrt{x}}{2(x+3)^2}$$

$$= \frac{3\sqrt{x}(x+3) - 2x\sqrt{x}}{2(x+3)^2} = \frac{\sqrt{x}(3x+9-2x)}{2(x+3)^2} = \frac{\sqrt{x}(x+9)}{2(x+3)^2}$$

Exercice IV

Problème d'immersion **6 points**

1) La bille doit rentrer dans le récipient cylindrique de 40 cm de rayon donc :
$0 \leqslant d \leqslant 80$ on a même $20 \leqslant d \leqslant 80$.

- Soit V_{eau}, le volume d'eau de hauteur 20 cm dans le récipient cylindrique :
$$V_{\text{eau}} = \pi r^2 h = \pi \times 40^2 \times 20$$
- Soit V_{bille} le volume de la bille sphérique de diamètre d :
$$V_{\text{bille}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{\pi d^3}{6}$$
- Soit V_{Total} le volume total (cylindre de hauteur d)
$$V_{\text{Total}} = \pi r^2 h = \pi \times 40^2 \times d$$

De $V_{\text{Total}} = V_{\text{eau}} + V_{\text{bille}}$ on obtient :

$$\pi \times 40^2 \times d = \pi \times 40^2 \times 20 + \frac{\pi d^3}{6}$$

En divisant par π et en multipliant par 6, on a :

$$6 \times 40^2 \times d = 6 \times 40^2 \times 20 + d^3 \quad \Leftrightarrow \quad d^3 - 9\,600d + 192\,000$$

2) a) On a : $f'(x) = 3x^2 - 9\,600 = 3(x^2 - 3\,200)$

La racine positive de $f'(x)$ est : $x = \sqrt{3\,200} = 40\sqrt{2}$

Le signe de f' est celui du trinôme, on obtient le tableau de variation suivant :

x	0		$40\sqrt{2}$		80
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$192\,000$	$\searrow$	$\simeq -170\,039$	$\nearrow$	$-6\,400$

b) D'après le tableau de variation, $f(x)$ change de signe une seule fois dans l'intervalle $[0\,;80]$. L'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution α dans l'intervalle $[0\,;80]$ (théorème des valeurs intermédiaires). On a : $\alpha \in [20; 40\sqrt{2}]$

c)

En ne connaissant pas le théorème des valeurs intermédiaires, on peut proposer l'algorithme suivant :

Variables
X réel
Initialisation
$20 \rightarrow X$
Traitement
Tant que $X^3 - 9\,600X + 192\,000 > 0$
    $X + 0,01 \rightarrow X$
FinTanque
Sortie
Afficher X

On obtient alors $X = 20,96$

On observe que le niveau de l'eau a très peu augmenté (moins de 1 cm).