Contrôle de mathématiques

Lundi 14 octobre 2013

Exercice 1

ROC **3 points**

Prérequis : théorème de comparaison
Soient deux suites (u_n) et (v_n).
Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

a) Montrer par récurrence l'inégalité de Bernoulli :

$$\forall \in \mathbb{N}, \forall a \in]0;+\infty[, \quad (1+a)^n \geqslant 1+na$$

b) En déduire que pour $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

Exercice 2

Limite de suite **3 points**

Déterminer les limites des suites (u_n) suivantes

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2n+1}{3n+5}$

b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n - \sqrt{n} + 3$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = -1 + \dfrac{\cos n}{n}$

d) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{4^n - 3^n}{4^n + 2^n}$

Exercice 3

Suite homographique **6 points**

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}.$$

On admet que pour tout entier naturel $n, u_n > 0$.

1) a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4. On pourra en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

b) Vérifier que si n est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4 alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

c) Établir que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.

d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$

2) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a) Établir que pour tout entier naturel $n, v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$.

b) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on determinera la raison et le premier terme.
En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

c) Montrer que pour tout entier naturel $n, u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.
Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 4

Vrai-Faux **2 points**

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse.
Soit une suite (u_n) de termes strictement positifs

a) Si pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \leqslant 5$, alors la suite (u_n) converge.

b) Si pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geqslant \dfrac{n}{2}$, alors la suite diverge.

EXERCICE 5

Algorithme **5 points**

1) On propose l'algorithme ci-contre.

a) Déterminer les valeurs à 10^{-3} des valeurs de sortie pour les valeurs de N suivantes : 2,5,10,20

b) Que calcule cet algorithme ?

Variables
N, K entiers et U réel
Initialisation
Lire la valeur de N
U prend la valeur 0
Traitement
Pour K de 1 à N faire
$\quad U + \dfrac{1}{K^2} \to U$
Fin pour
Sortie
Afficher u

2) On pose la suite (S_n) définie, pour tout entier supérieur ou égal à 1, par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

a) Calculer les valeurs exactes de S_1, S_2 et S_3

b) Montrer que la suite (S_n) est croissante.

c) On peut montrer que : $\forall n \geqslant 1,\ S_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$.
Montrer alors que la suite est convergente vers une limite ℓ.

d) On admet que : $\ell = \dfrac{\pi^2}{6}$
On voudrait connaître la vitesse de convergence de la suite (S_n). Proposer un algorithme pour déterminer la valeur de N telle que : $\left|S_N - \dfrac{\pi^2}{6}\right| < 10^{-2}$.
Donner la valeur de N puis conclure sur la vitesse de convergence.