Correction contrôle de mathématiques

Du mardi 18 novembre 2014

Exercice 1

Racine d'un polynôme du 3e degré **(6 points)**

1) Si $x \neq 0$ $P(x) = x^3\left(1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3} = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par produit} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty\end{array}$$

2) $P'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

3) $P(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 4x + 1 = 0$

$x_1 = 1$ est racine évidente et le produit des racines vaut $\dfrac{1}{3}$ donc $x_2 = \dfrac{1}{3}$

Le trinôme est positif à l'extérieur des racines et négatif à l'intérieur.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		α	$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		
$P(x)$		↗	$-\dfrac{23}{27}$	↘	-1	↗	0 ↗	$+\infty$

4) D'après le tableau de variation si $x < 1$, $P(x) \leqslant -\dfrac{23}{27}$ donc $P(x) < 0$ et donc ne s'annule pas.

Théorème des valeurs intermédiaires : Si une fonction f est continue, monotone sur un intervalle $[a;b]$ et si $f(a)f(b) < 0$, alors il existe un unique $\alpha \in [a;b]$ tel que $f(\alpha) = 0$

Ici P est continue (car dérivable), monotone (croissante) sur $[1\,;+\infty[$ et $0 \in f([1\,;+\infty[) = [-1;+\infty[$ donc d'après le théorème de valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in [1\,;+\infty[$ tel que $P(\alpha) = 0$.

5) $P(1) = 1$ et $P(2) = 8 - 8 + 2 - 1 = 1$ donc $P(1)P(2) < 0$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $1 < \alpha < 2$.

Avec l'algorithme de dichotomie : $1{,}754\,8 < \alpha < 1{,}754\,9$ pour 14 itérations.

Exercice 2

Étude d'une fonction **(5 points)**

1) La fonction f est dérivable si $4 - x^2 > 0$ soit sur $]-2;\ 2[$. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet alors en -2 et 2 une demi-tangente verticale.

2) $f'(x) = \sqrt{4-x^2} + x \times \dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \sqrt{4-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$

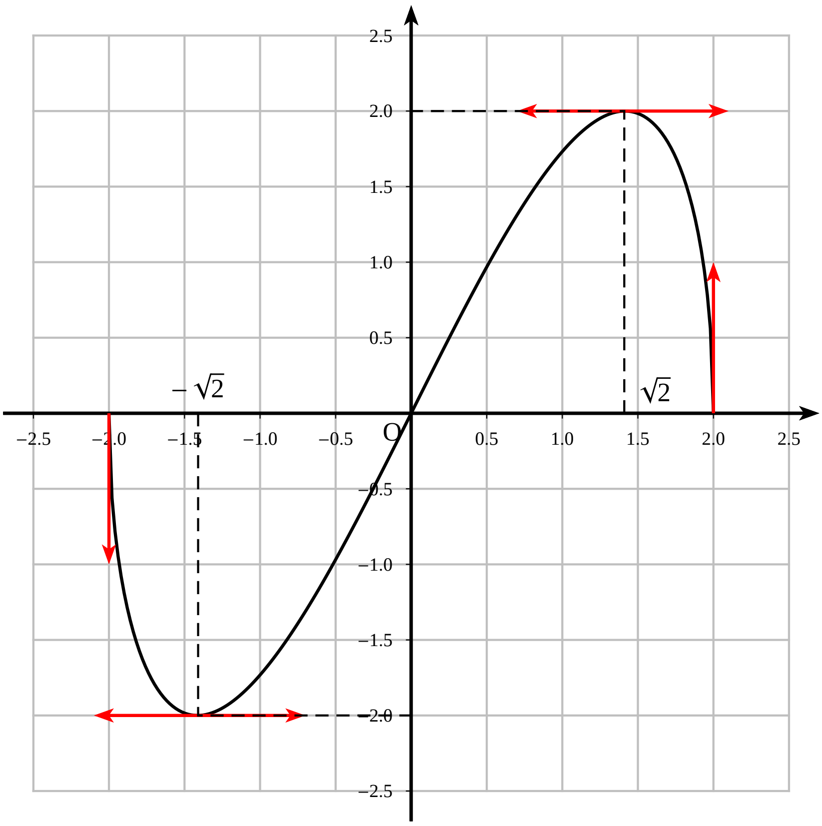
3) $f'(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 = 2 \quad\Leftrightarrow\quad x = \pm\sqrt{2}$.

Le signe de f' est le signe du trinôme $2 - x^2$ car sur $]-2;\ 2[$, $\sqrt{4-x^2} > 0$.

x	-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2
$f'(x)$	‖	$-$	0		$+$		0	$-$	‖
$f(x)$	0	↘	-2	↗	0	↗	2	↘	0

4) On peut remarquer que la fonction f est une fonction impaire sur $[-2;\ 2]$ car
$f(-x) = (-x)\sqrt{4-(-x)^2} = -x\sqrt{4-x^2} = -f(x)$

La courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine. On obtient la courbe suivante qui admet deux demi-tangentes verticales en -2 et 2 et deux tangentes horizontales en $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.



Exercice 3

Calcul de limites **(4 points)**

1) a) $x^2 - 3x + 2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x_1 = 1$ ou $x_2 = 2$.

En effet 1 est racine évidente, le produit des racines vaut 2 donc 2 est la seconde racine. On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	−	0	+	

b) On obtient la limite suivante :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1} 2x+1 = 3 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x^2-3x+2 = 0^-\end{array}\right\} \text{ Par quotient } \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{2x+1}{x^2-3x+2} = -\infty$$

2) a) Sur $]1\,;+\infty[$, on a :

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \Leftrightarrow 3x-1 \leqslant 3x+\cos x \leqslant 3x+1 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x-1} \leqslant \frac{3x+\cos x}{x-1} \leqslant \frac{3x+1}{x-1}$$

b) Sur $]1\,;+\infty[$, on a : $\dfrac{3x-1}{x-1} = \dfrac{3-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$ et $\dfrac{3x+1}{x-1} = \dfrac{3+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$ (simplification par x)

Par quotient : $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 3$

D'après le théorème des gendarmes, on a $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$

3) On a pour $x \neq 0$, $\dfrac{4x-5}{x-1} = \dfrac{4-\frac{5}{x}}{1-\frac{1}{x}}$ simplification par x.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4-\frac{5}{x}}{1-\frac{1}{x}} = 4 \\ \lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = 2\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par composition} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{4x-5}{x-1}} = 2\end{array}$$

EXERCICE 4

Optimisation **(5 points)**

Partie A

1) $f'(x) = -3x^2 + \dfrac{9}{4}$ donc pour $x \in \left[0\,;\dfrac{3}{2}\right]$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Le signe de la dérivée f' est le signe du trinôme $-3x^2 + \dfrac{9}{4}$

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{3}{2}$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

2) $T_1 : \quad y = f'(0)x + f(0) \quad \Leftrightarrow \quad y = \dfrac{9}{4}x$

$T_2 : \quad y = f'\left(\dfrac{3}{2}\right)\left(x - \dfrac{3}{2}\right) + f\left(\dfrac{3}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad y = -\dfrac{9}{2}\left(x - \dfrac{3}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad y = -\dfrac{9}{2}x + \dfrac{27}{4}$

Partie B

Dans cette partie, les lettres d, x et h désignent des longueurs exprimées en mètres.
On suppose que le diamètre d du tronc d'arbre mesure 1,5 mètre.

1) Dans le rectangle de côté x et h et de diagonale d, d'après le théorème de Pythagore, on a :

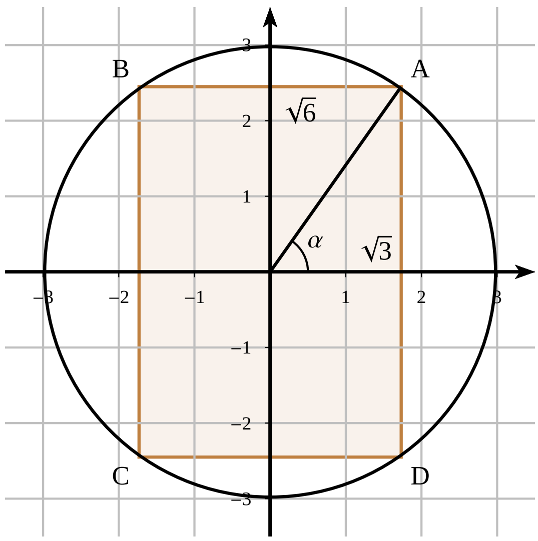
$$x^2 + h^2 = d^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + h^2 = \frac{9}{4} \quad (1)$$

2) De la relation (1), on a : $h^2 = \dfrac{9}{4} - x^2$ donc $xh^2 = x\left(\dfrac{9}{4} - x^2\right) = -x^3 + \dfrac{9}{4}x = f(x)$

3) D'après la partie A, $xh^2 = f(x)$ est maximum si $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0,866$ m et donc

$h^2 = \dfrac{9}{4} - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{6}{4} \quad \Rightarrow \quad h = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \simeq 1,225$ m

4) Comme le rayon vaut 3 cm, les dimensions sont multipliées par 4 et donc les coordonnées du point A de la figure sont $\left(\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{6}\right) \simeq (1,732\ ;\ 2,450)$



Remarque : $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan\sqrt{2} \simeq 54,74°$