Correction devoir du 04 novembre 2014

Exercice I

Le nombre d'Apéry **(6 points)**

1) $u_1 = 1$; $u_2 = 1 + \dfrac{1}{8} = \dfrac{9}{8}$; $u_3 = 1 + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{27} = \dfrac{216+27+8}{216} = \dfrac{251}{216}$

2) a) On peut proposer l'algorithme suivant :

Variables : N, I entiers
U réel
Entrées et initialisation
Lire N
$0 \to U$
Traitement
pour I de 1 à N **faire**
$U + \dfrac{1}{I^3} \to U$
fin
Sorties : Afficher U

b) Remplir puis compléter le tableau suivant en donnant les valeurs de u_n à 10^{-4} près :

n	5	10	20	50	100
u_n	1,185 7	1,197 5	1,200 9	1,201 9	1,202 0

c) La suite semble converger vers $\ell \simeq 1,202$

3) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$

Initialisation : $u_1 = 1$ et $2 - \dfrac{1}{1} = 1$ donc $u_1 \leqslant 2 - \dfrac{1}{1}$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Supposons que $u_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$, montrons que $u_{n+1} \leqslant 2 - \dfrac{1}{n+1}$

$$u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad u_n + \frac{1}{(n+1)^3} \leqslant 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^3} \quad \Leftrightarrow \quad u_{n+1} \leqslant 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^3}$$

or $n \geqslant 1 \quad \Rightarrow \quad (n+1)^3 \geqslant (n+1)^2 \geqslant n(n+1) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{(n+1)^3} \leqslant \dfrac{1}{n(n+1)}$ on alors :

$$u_{n+1} \leqslant 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} \quad \Leftrightarrow \quad u_{n+1} \leqslant 2 + \frac{-n-1+1}{n(n+1)} \quad \Leftrightarrow \quad u_{n+1} \leqslant 2 - \frac{n}{n(n+1)} \quad \Leftrightarrow$$
$$u_{n+1} \leqslant 2 - \frac{1}{n+1}$$

La proposition est héréditaire

Par initialisation et hérédité, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$

b) De la propriété du 3a), $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant 2$. La suite (u_n) est majorée par 2.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^3} > 0$. la suite (u_n) est croissante.

La suiste (u_n) est croissante, majorée par 2, d'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) est convergente vers ℓ, appelé le nombre d'Apéry.

$\ell \simeq 1{,}202\,056\,903\,159\,594\,285\,3\ldots$ (30 milliards de décimales connues en 2009)

Exercice II

Limites de fonctions **(3 points)**

1) On pose $f(x) = 3x - 1 - \dfrac{x}{x^2+1} = 3x - 1 + \dfrac{1}{x + \dfrac{1}{x}}$ (simplification par x)

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to-\infty} x + \frac{1}{x} = -\infty \text{ par quotient } \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x+\frac{1}{x}} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} 3x - 1 = -\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par somme} \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\end{array}$$

2) a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant -\cos x \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leqslant 2 - \cos x \leqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{2-\cos x} \leqslant 1$

b) On a alors : $\forall x > -2$, $\dfrac{x+2}{2-\cos x} \geqslant \dfrac{x+2}{3}$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{3} = +\infty$ par comparaison $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{2-\cos x} = +\infty$

3) On pose $f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$ forme indéterminée en $+\infty$

$$f(x) = \frac{(x - \sqrt{x^2+1})(x + \sqrt{x^2+1})}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2 - x^2 - 1}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{x + \sqrt{x^2+1}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 + 1 = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par composition} \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty\end{array} \quad \text{par somme } \lim_{x\to+\infty} x + \sqrt{x^2+1} = +\infty$$

Par quotient $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Exercice III

Étude d'une fonction **(8 points)**

1) a) En -1 :

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to-1} x^2 - 3x + 1 = 5 \\ \displaystyle\lim_{x\to-1^+} x + 1 = 0^+ \\ \displaystyle\lim_{x\to-1^-} x + 1 = 0^- \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par quotient} \\ \displaystyle\lim_{x\to-1^+} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to-1^-} = -\infty\end{array}$$

b) En $\pm+\infty$, $\quad f(x)=\dfrac{x^2\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\dfrac{x-3+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x+3+\dfrac{1}{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x}=1\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Par quotient}\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\end{array}\quad \text{de même}\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

2) $f'(x)=\dfrac{(2x-3)(x+1)-(x^2-3x+1)}{(x+1)^2}=\dfrac{2x^2+2x-3x-3-x^2+3x-1}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x-4}{(x+1)^2}$

3) $f'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; x^2+2x-4=0,\quad \Delta=20=(2\sqrt{5})^2>0\quad$ 2 racines

$x_1=\dfrac{-2+\sqrt{20}}{2}=-1+\sqrt{5}\quad$ et $\quad x_2=\dfrac{-2-\sqrt{20}}{2}=-1-\sqrt{5}$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{5}$		-1		$-1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-9.47	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-0.53	↗	$+\infty$

4) Il faut résoudre : $f'(x)=-4 \;\Leftrightarrow\; x^2+2x-4=-4(x+1)^2 \;\Leftrightarrow$
$x^2+2x-4=-4x^2-8x-4 \;\Leftrightarrow\; 5x^2+10x=0 \;\Leftrightarrow\; 5x(x+2)=0$

Il existe deux tangentes (T_1) et (T_2) à $\mathscr{C}_f$ parallèle à la droite d'équation $y=-4x$ aux points d'abscisses respectifs $x=-2$ et $x=0$

$(T_1): y=-4(x+2)-11 \;\Leftrightarrow\; y=-4x-19\quad$ et $\quad(T_2): y=-4x+1$

5) L'équation réduite est : $y=\dfrac{3}{2}x$. Il faut donc résoudre :

$f'(x)=\dfrac{3}{2} \;\Leftrightarrow\; 2(x^2+2x-4)=3(x+1)^2 \;\Leftrightarrow\; 2x^2+4x-8=3x^2+6x+3 \;\Leftrightarrow$
$2x^2+4x-8=3x^2+6x+3 \;\Leftrightarrow\; x^2+2x+11=0 \quad \Delta=-40<0$

Il n'existe donc pas de tangente à $\mathscr{C}_f$ parallèle à la droite d'équation $3x-2y=0$

6) Voir courbe

Exercice IV

Calculs de dérivées **(3 points)**

1) a) $f'(x)=\dfrac{3x^2(x^2-1)-2x\times x^3}{(x^2-1)^2}=\dfrac{x^2(3x^2-3-2x^2)}{(x^2-1)^2}=\dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$

b) $f'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; x^2=0$ ou $x^2=3 \;\Leftrightarrow\; x=0$ ou $x=\pm\sqrt{3}$

2) a) La fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ du fait de la fonction racine (le dénominateur ne s'annulant pas) et si $x>0 \;\Rightarrow\; x\neq-1$

b) $g'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times (x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \dfrac{x+1-2x}{2\sqrt{x}\,(x+1)^2} = \dfrac{-x+1}{2\sqrt{x}\,(x+1)^2}$

c) $g'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x+1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$

Le signe de $g'(x)$ est donné par le signe de $(-x+1)$ car $x > 0$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	0

Courbe de l'exercice III