Correction devoir du mardi 6 janvier 2015

EXERCICE I

Propriétés de la fonction *ln* **(5 points)**

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\ln(x^2-1)+2\ln 2=\ln(4x-1)$

Conditions : $\begin{cases} x^2-1>0 \\ 4x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty;-1[\cup]1\,;+\infty[\\ x>\dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow D_f=]1\,;+\infty[$

On regroupe les termes : $\ln 4(x^2-1)=\ln(4x-1)$

La fonction ln étant monotone sur $]0\,;+\infty[$, on a :

$4(x^2-1)=4x-1 \Leftrightarrow 4x^2-4=4x-1 \Leftrightarrow 4x^2-4x-3=0$

$\Delta=16+48=64=8^2$, on a deux racines :

$$x_1=\frac{4+8}{2}=\frac{3}{2}\in D_f \quad \text{et} \quad x_2=\frac{4-8}{2}=-\frac{1}{2}\notin D_f$$

On a alors une seule solution $S=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\ln(x^2-x-2)\leqslant 2\ln(3-x)$

Conditions : $\begin{cases} x^2-x-2>0 \\ 3-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in]-\infty;-1[\cup]2\,;+\infty[\\ x<3 \end{cases} \Rightarrow D_f=]-\infty;-1[\cup]2\,;3[$

On regroupe les termes : $\ln(x^2-x-2)\leqslant\ln(3-x)^2$

La fonction ln étant croissante sur $]0\,;+\infty[$, on a :

$x^2-x-2\leqslant 9-6x+x^2 \Leftrightarrow 5x\leqslant 11 \Leftrightarrow x\leqslant\dfrac{11}{5}$

On fait l'intersection avec D_f

On trouve alors la solution : $S=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]2\,;\dfrac{11}{5}\right]$

3) On veut que : $1-\left(\dfrac{35}{36}\right)^n>0,99 \Leftrightarrow -\left(\dfrac{35}{36}\right)^n>-0,01 \Leftrightarrow \left(\dfrac{35}{36}\right)^n<0,01$

On compose avec la fonction ln qui est croissante sur $]0\,;+\infty[$

$n\ln\dfrac{35}{36}<\ln 0,01 \Leftrightarrow n>\dfrac{\ln 0,01}{\ln\dfrac{35}{36}} \Leftrightarrow n>163,47$ car $\ln\dfrac{35}{36}<\ln 1=0$

Il faut au moins 164 lancers pour que la probabilité d'un double six soit supérieur à 99 %.

4) $f(x) = ax + b + \dfrac{\ln x}{x}$

- $\mathscr{C}_f$ passe par A(1 ;0) donc $f(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = -a$
- $\mathscr{C}_f$ admet en A une tangente parallèle à $y = 2x$, donc $f'(1) = 2$

  or $f'(x) = a + \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = a + \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$ donc $f'(1) = a + 1$

  On a alors $a + 1 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1$ et donc $b = -1$

Conclusion : $f(x) = x - 1 + \dfrac{\ln x}{x}$

Exercice II

Logarithme et suite **(10 points)**

Partie A

1) $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 4} \quad \Rightarrow \quad \forall x \in [0\,;+\infty[, \quad f'(x) > 0.$

La fonction f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2) a) $\ln(x^2 + 4) = \ln\left[x^2\left(1 + \dfrac{4}{x^2}\right)\right] = \ln x^2 + \ln\left(1 + \dfrac{4}{x^2}\right) = 2\ln x + \ln\left(1 + \dfrac{4}{x^2}\right)$

$g(x) = f(x) - x = 2\ln x + \ln\left(1 + \dfrac{4}{x^2}\right) - x = x\left[\dfrac{2\ln x}{x} + \dfrac{1}{x} \times \ln\left(1 + \dfrac{4}{x^2}\right) - 1\right]$

or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{4}{x^2} = 1 \\ \displaystyle\lim_{x\to 1} \ln x = 0\end{array}\right\}$ Par composition $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right) = 0$

Par somme et produits $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} -x = -\infty$

b) g est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ par composition et somme de fonctions dérivables.

$g'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 4} - 1 = \dfrac{2x - x^2 - 4}{x^2 + 4} = \dfrac{-x^2 + 2x - 4}{x^2 + 4}$

- $g'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 2x - 4 = 0$, $\Delta = 4 - 16 = -12$ pas de racines
- donc $\forall x \in [0\,;+\infty[$, $g'(x) < 0$. La fonction g est décroissante.

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$2\ln 2$	0	$-\infty$

c) Sur $[0\,;+\infty[$, la fonction g est continue car dérivable, monotone (décroissante) et $0 \in g([0\,;+\infty[) =]-\infty;\ 2\ln 2]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique α tel sur $g(\alpha) = 0$

d) $g(3) \simeq -0,435$ donc $g(0) \times g(3) < 0$ donc $\alpha \in [0\ ;\ 3]$

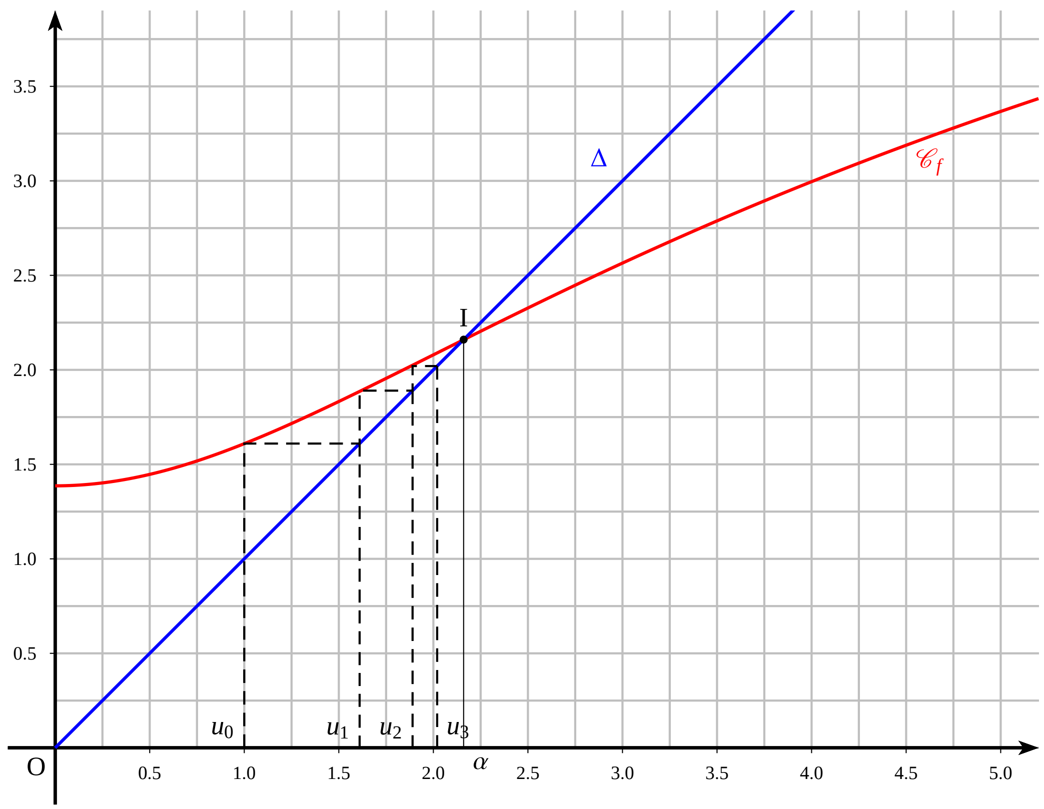
Avec l'algorithme par dichotomie, on trouve $2,158 < \alpha < 2,159$ après 12 itérations.

e) Comme g est décroissante sur $[0\ ;+\infty[$, on obtient le tableau de signe suivant :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie B

1) D'après les premiers termes sur le graphique suivant, on peut faire la conjecture suivante : la suite (u_n) est croissante et converge vers α



2) Voir graphique

3) a) Soit la proposition : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ 1 \leqslant u_n \leqslant \alpha$

Initialisation : $u_0 = 1$ donc $1 \leqslant u_0 \leqslant \alpha$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Supposons que $1 \leqslant u_n \leqslant \alpha$, montrons que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

$$1 \leqslant u_n \leqslant \alpha \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leqslant u_n^2 \leqslant \alpha^2 \quad \Leftrightarrow \quad 5 \leqslant u_n^2 + 4 \leqslant \alpha^2 + 4 \quad \Leftrightarrow \quad \ln 5 \leqslant \ln(u_n^2 + 4) \leqslant \ln(\alpha^2 + 4)$$

car la fonction ln est croissante sur $]0\ ;+\infty[$. De plus, on sait que $g(\alpha) = 0$ donc $\ln(\alpha^2 + 4) = \alpha$. On a donc :

$5 \leqslant \ln(u_n^2 + 4) \leqslant \alpha \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leqslant \ln 5 \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$. La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité, $\forall n \in \mathbb{N},\ \ 1 \leqslant u_n \leqslant \alpha$

b) $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$.

D'après la question 2e) de la partie A que $\forall x \in [0\,;\,\alpha],\ \ g(x) \geqslant 0$

Comme $1 \leqslant u_n \leqslant \alpha\ \ g(u_n) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. La suite (u_n) est croissante.

La suite (u_n) est croissante et majorée par α, d'après le théorème des suites monotone la suite (u_n) converge vers ℓ

c) La fonction f est continue sur $]1\ \ +\infty[$, d'après le théorème du point fixe, la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$. D'après la question 2c) de la partie A, il existe un unique α tel que $f(\alpha) = \alpha$. On a donc $\ell = \alpha \simeq 2,159$

Exercice III

Pour les non spécialistes

1) La fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = 4,329 \ln x + 70$ est la fonction associée à la suite (d_n). Comme la fonction ln est une fonction strictement croissante, f est croissante sur $[1\,;+\infty[$. La suite (d_n) est alors strictement croissante.

2) $$\begin{aligned} d_{10n} - d_n &= 4,329 \ln 10n + 70 - 4,329 \ln n - 70 = 4,329(\ln 10 + \ln n) - 4,329 \ln n \\ &= 4,329 \ln 10 \simeq 9,97 \end{aligned}$$

Le nombre de décibels augmente donc d'à peu près 10 si le nombre d'appareils est multiplié par 10.

3) a) $d_{40} = 4,329 \ln 40 + 70 \simeq 85,97$

b) Comme $d_{40} > 85$ l'employé est donc dans son bon droit s'il refuse de travailler.

4) a) $4,329 \ln n + 70 \leqslant 85 \quad \Leftrightarrow \quad 4,329 \ln n \leqslant 15 \quad \Leftrightarrow \quad \ln n \leqslant \dfrac{15}{4,329}$

Comme la fonction exp est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$, $n \leqslant e^{\frac{15}{4,329}}$ $(\simeq 31,98)$

On a $d_n \leqslant 85 \quad \Leftrightarrow \quad n \leqslant 31$

b) On peut placer au maximum 31 appareils dans ce local.

5) On peut proposer l'algorithme suivant qui donne comme réponse 31.

Variables : N entier
Entrées et initialisation
  $1 \to N$
Traitement
  tant que $4,329 \ln N + 70 \leqslant 85$ **faire**
    $N + 1 \to N$
  fin
Sorties : Afficher $N - 1$

⚠ On doit afficher $N - 1$ car pour N la condition n'est plus vérifiée.

6) On doit pour chaque boucle incrémenter la fonction f de 0,1 et vérifier que $f(x) \leqslant 120$. On a alors l'algorithme suivant qui donne comme résultat 21, 7 bars :

Variables : X décimal
Entrées et initialisation
| $1 \to X$
Traitement
| **tant que** $8,68 \ln X + 93,28 \leqslant 120$ **faire**
| | $X + 0,1 \to X$
| **fin**
Sorties : Afficher $X - 0,1$

Exercice IV

Pour les spécialistes

1) a) On a $143 = 11 \times 13$ et $51 = 3 \times 17$. Les nombre 143 et 51 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Bézout, il existe un couple d'entier relatifs (x, y) tel que $143x + 51y = 1$

b) On applique le théorème d'Euclide puis on le remonte pour trouver une solution particulière.

$$\begin{aligned} 143 &= 51 \times 2 + 41 \quad (1) \\ 51 &= 41 \times 1 + 10 \quad (2) \\ 41 &= 10 \times 4 + 1 \quad \Rightarrow \quad 10 \times 4 = 41 - 1 \end{aligned}$$

$$(2) \times 4 \qquad \begin{aligned} 51 \times 4 &= 41 \times 4 + 10 \times 4 \\ &= 41 \times 4 + 41 - 1 \\ &= 41 \times 5 - 1 \quad \Rightarrow \quad 41 \times 5 = 51 \times 4 + 1 \end{aligned}$$

$$(1) \times 5 \qquad \begin{aligned} 143 \times 5 &= 51 \times 10 + 41 \times 5 \\ &= 51 \times 10 + 51 \times 4 + 1 \\ &= 51 \times 14 + 1 \end{aligned}$$

On a $143 \times 5 + 51 \times (-14) = 1$. $(5\,, -14)$ est solution de (E)

c) En soustrayant l'équation de la solution générale à l'équation de la solution particulière, on trouve :

$$\begin{cases} 143x + 51y = 1 \\ 143(5) + 51(-14) = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad 143(x-5) + 51(y+14) = 0$$

On obtient alors $143(x - 5) = 51(-y - 14)$ (E').

51 divise $143(x-5)$, comme 143 et 51 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 51 divise $(x - 5)$. On a alors : $x - 5 = 51k, \quad k \in \mathbb{Z}$

En remplaçant dans (E'), on trouve $-y - 14 = 143k$

En isolant x et y, on obtient l'ensemble des couples solution (x, y) :

$$\begin{cases} x = 5 + 51k \\ y = -14 - 143k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

d) $\begin{cases} x \equiv 0 \ [51] \\ x \equiv 0 \ [143] \end{cases} \quad \Rightarrow \quad$ 51 et 143 divise x

Comme 51 et 143 sont premiers entre eux, d'après le corollaire du théorème de Gauss, $51 \times 143 = 7293$ divise x donc $x \equiv 0 \ [7293]$

Réciproquement $x \equiv 0 \ [7293]$ alors 7293 divise x, comme $7293 = 51 \times 143$ alors 51 et 143 divise x et donc $x \equiv 0 \ [51]$ et $x \equiv 0 \ [143]$

e) Le temps t écoulé doit être un multiple de 51 et 143, d'après la question précédente t est donc un multiple de 7293. On observera à nouveau les deux événement au bout de 7293 jours.

Pour déterminer la date, il faut connaître le nombre d'années contenues dans 7293 jours.

$\dfrac{7293}{365,25} \simeq 19,6$ soit presque 20 années.

Sur les 20 années, comme 2015 n'est pas bissextile, il y a 5 années bissextiles, donc il y a : $20 \times 365 + 5 = 7305$ jours.

Il faut donc enlever $7305 - 7293 = 12$ jours au 1er janvier soit le 20 décembre de l'année $2015 + 19 = 2034$

Le jour sera donc le 20 décembre 2034.

Pour connaître la date, $7293 = 7 \times 1041 + 6$ donc $7293 \equiv 6 \ [7]$. Il faut donc rajouter 6 jours au jeudi soit le mercredi.

Les deux événements auront lieu le même jour le mercredi 20 décembre 2034.

2) a) $\text{pgcd}(6, 21) = 3$

b) Si l'on veut que les événements A et B aient lieu en même temps après u périodes de 6 jours et v périodes de 21 jours, on doit avoir :

$6u = 21v + 8 \quad \Leftrightarrow \quad 6u - 21v = 8 \quad (E_1)$

8 n'est pas un multiple du $\text{pgcd}(6, 21) = 3$, d'après le corollaire du théorème de Bézout, il n'y pas de solutions entière à l'équation (E_1).

c) Les événements A et B ont lieu en même temps après u périodes de 6 jours et v période de b jours, on a alors :

$6u = bv + 8 \quad \Leftrightarrow \quad 6u - bv = 8 \quad (E_2)$

Pour que l'équation (E_2) ait des solutions entières, d'après le corollaire de Bézout, 8 doit être un multiple de $d = \text{pgcd}(6, b)$, donc d divise 8 et 6 d'où $d = 1$ ou $d = 2$. b ne doit pas être un multiple de 3.

Pour que les événements A et B aient lieu en même temps alors $b \not\equiv 0 \ [3]$