BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 7

Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.*

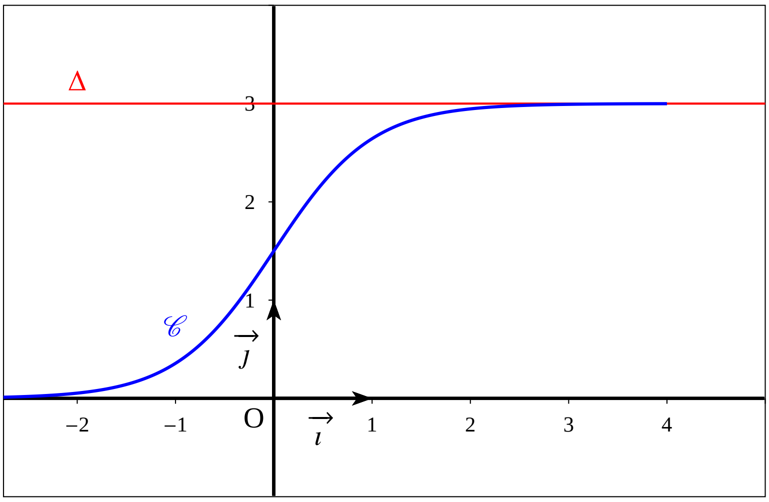
TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

EXERCICE 1 (4 points)

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{3}{1+e^{-2x}}$

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



1) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2) Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
3) Démontrer que l'équation $f(x) = 2,999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
   On pourra rentrer la fonction $g(x) = f(x) - 2,999$ *dans sa calculatrice.*

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3 - f(x)$.

1) Justifier que la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$.
2) On désigne par H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = -\dfrac{3}{2}\ln\left(1+e^{-2x}\right)$.
   Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.
3) Soit a un réel strictement positif.
   a) Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$.
   b) Démontrer que $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+e^{-2a}}\right)$.
   c) On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan défini par : $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ f(x) \leqslant y \leqslant 3 \end{cases}$
   Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine $\mathscr{D}$.

EXERCICE 2 (5 points)

Les trois parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.
Les probabilités seront arrondies au dix millième.

Un élève doit se rendre à son lycée chaque matin pour 8 h 00. Pour cela, il utilise, selon les jours, deux moyens de transport : le vélo ou le bus.

Partie A

L'élève part tous les jours à 7 h 40 de son domicile et doit arriver à 8 h 00 à son lycée. Il prend le vélo 7 jours sur 10 et le bus le reste du temps.
Les jours où il prend le vélo, il arrive à l'heure dans 99,4 % des cas et lorsqu'il prend le bus, il arrive en retard dans 5 % des cas.
On choisit une date au hasard en période scolaire et on note V l'événement "*L'élève se rend au lycée à vélo*", B l'événement "*l'élève se rend au lycée en bus*" et R l'événement "*L'élève arrive en retard au lycée*".

1) Traduire la situation par un arbre de probabilités.
2) Déterminer la probabilité de l'événement $V \cap R$.
3) Démontrer que la probabilité de l'événement R est 0,019 2
4) Un jour donné, l'élève est arrivé en retard au lycée. Quelle est la probabilité qu'il s'y soit rendu en bus ?

Partie B : le vélo

On suppose dans cette partie que l'élève utilise le vélo pour se rendre à son lycée.
Lorsqu'il utilise le vélo, on modélise son temps de parcours, exprimé en minutes, entre son domicile et son lycée par une variable aléatoire T qui suit le loi normale d'espérance $\mu = 17$ et d'écart-type $\sigma = 1{,}2$.

1) Déterminer la probabilité que l'élève mette entre 15 et 20 minutes pour se rendre à son lycée.
2) Il part de son domicile à vélo à 7 h 40. Quelle est la probabilité qu'il soit en retard au lycée ?
3) L'élève part à vélo. Avant quelle heure doit-il partir pour arriver à l'heure au lycée avec une probabilité de 0,9 ? Arrondir le résultat à la minute près.

Partie C : le bus

Lorsque l'élève utilise le bus, on modélise son temps de parcours, exprimé en minutes, entre son domicile et son lycée par une variable aléatoire T' qui suit la loi normale d'espérance $\mu' = 15$ et d'écart-type σ'.
On sait que la probabilité qu'il mette plus de 20 minutes pour se rendre à son lycée en bus est de 0,05.
On note Z' la variable aléatoire égale à $\dfrac{T' - 15}{\sigma'}$

1) Quelle loi la variable aléatoire Z' suit-elle ?
2) Déterminer une valeur approchée à 0,01 près de l'écart-type σ' de la variable aléatoire T'.

EXERCICE 3 (5 points)

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Dans la question 2), le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

1) Soit la suite (u_n) définie par un premier terme u_0 et par la relation de récurrence, $u_{n+1} = au_n + b$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $a \neq 1$
   Affirmation 1 :
   La suite $v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$ est géométrique.
2) **Affirmation 2 :**
   Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation : $z - \bar{z} + 2 - 4i = 0$
   admet une solution unique.
3) **Affirmation 3 :**
   $$\ln\left(\sqrt{e^7}\right) + \frac{\ln\left(e^9\right)}{\ln\left(e^2\right)} = \frac{e^{\ln 2 + \ln 3}}{e^{\ln 3 - \ln 4}}$$
4) **Affirmation 4 :**
   $$\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x + 2}\,\mathrm{d}x = -\ln\left(\frac{3}{5}\right)$$
5) **Affirmation 5 :**
   L'équation $\ln(x-1) - \ln(x+2) = \ln 4$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 4 (2 points)

La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.
On sait que $P(X \leqslant 2) = 0,15$.

1) Déterminer la valeur exacte du réel λ.
2) a) Montrer que pour tous réels positifs t et h, $P_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h) = P(X \geqslant h)$.
   b) Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans. Quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans ?
   c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et donner une interprétation de ce résultat.

EXERCICE 5 (4 points)

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On désigne par (E) l'équation : $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ d'inconnue complexe z.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$.
   Écrire les solutions de cette équation sous une forme exponentielle.
2) On désigne par a le nombre complexe dont le module est égal à 2 et dont un argument est égal à $\dfrac{\pi}{3}$. Calculer a^2 sous forme algébrique.
   En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$. On écrira les solutions sous forme algébrique.
3) Démontrer que si z est une solution de l'équation (E) alors son conjugué $\bar{z}$ est également une solution de (E).
   En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E).
   On admettra que (E) admet au plus quatre solutions.