BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

OBLIGATOIRE ET SPÉ

Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.*

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A

1) a) Voir figure ci-dessous

b) $\dfrac{b}{a} = \dfrac{-2-i}{-1+2i} = \dfrac{2i^2-i}{-1+2i} = \dfrac{i(-1+2i)}{-1+2i} = i$

c) $\left|\dfrac{b}{a}\right| = |i| \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{|b|}{|a|} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\text{OB}}{\text{OA}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{OB} = \text{OA}$

$\arg\left(\dfrac{b}{a}\right) = \arg(i) \quad \Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{\text{OA}}\,;\overrightarrow{\text{OB}}) = \dfrac{\pi}{2}$

Le triangle OAB est donc isocèle rectangle en O.

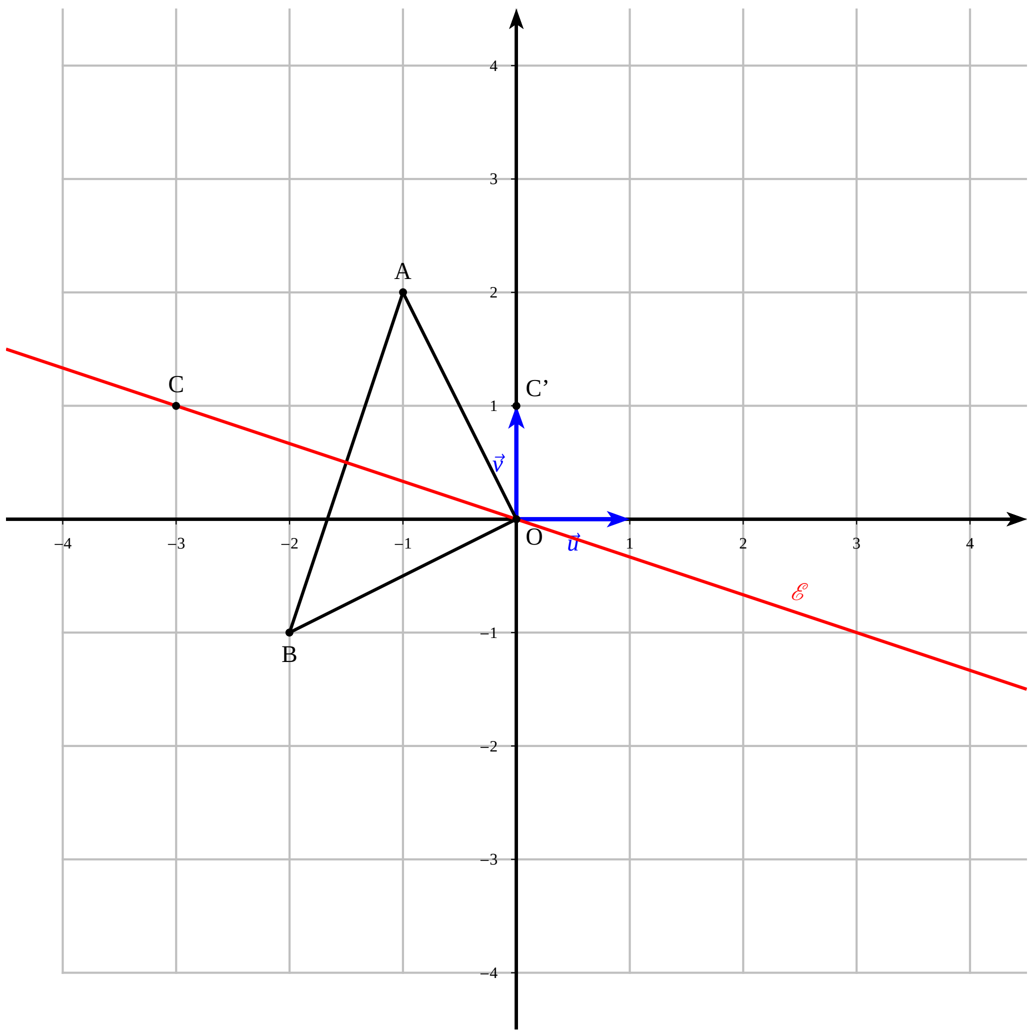
2) a) $c' = \dfrac{c+1-2i}{c+2+i} = \dfrac{-3+i+1-2i}{-3+i+2+i} = \dfrac{-2-i}{-1+2i} = i$ (voir qustion 1b.)

b) $|z'| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\dfrac{z+1-2i}{z+2+i}\right| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{|z-(-1+2i)|}{|z-(-2-i)|} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z-a| = |z-b| \quad \Leftrightarrow \quad \text{AM} = \text{BM}$

$\mathscr{E}$ est donc la médiatrice du segment [AB].

c) Le triangle OAB est isocèle en O, donc O est sur la médiatrice de [AB] : $\text{O} \in \mathscr{E}$

On sait que $c' = i$ donc $|c'| = 1$ donc $\text{C} \in \mathscr{E}$



Partie B

1) $z_2 = (1+i)z_1 = (1+i)(\sqrt{3}-i) = \sqrt{3} - i + i\sqrt{3} + 1 = \sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)$

2) $|z_1| = \sqrt{3+1} = 2$ et $\left.\begin{array}{l} \cos\theta_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$ $\theta_1 = -\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$ donc $z_1 = 2\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ et $\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\}$ $\theta = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$ donc $1+i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

On a donc $z_2 = (1+i)z_1 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2\,e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)} = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$

3) $z_2 = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right)$ et $z_2 = \sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)$

Par identification des parties imaginaires des formes algébrique et trigonométrique, on a :

$2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \sqrt{3}-1 \iff \sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

EXERCICE 2 (5 points)

1) Limite en 0 :

$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 0} 2x-3 = -3 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} -4\ln x = +\infty \end{array}\right\}$ Par somme $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

Limite en $+\infty$: forme indéterminée, on change la forme $f(x) = x\left(2 - \dfrac{3}{x} - 4 \times \dfrac{\ln x}{x}\right)$

$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2 - \frac{3}{x} = 2 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} -4\times\frac{\ln x}{x} = 0 \end{array}\right\}$ Par somme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2 - \frac{3}{x} - 4\times\frac{\ln x}{x} = 2$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ par produit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ car somme et produit de fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$

$f'(x) = 2 - \dfrac{4}{x} = \dfrac{2x-4}{x} = \dfrac{2(x-2)}{x}$

3) • $f'(x) = 0 \iff x = 2$

• Comme $x > 0$, f' est du signe de $(x-2)$

On obtient le tableau de variation suivant : $f(2) = 1 - 4\ln 2 \simeq -1,77$

x	0	β	2	α	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	0	$1-4\ln 2$	0	$+\infty$

4) (T) : $y = f'(1)(x-1) + f(1) \iff y = -2(x-1) - 1 \iff y = -2x+1$

5) a) • Sur $]0\ ;\ 2]$, la fonction f est continue (car dérivable), monotone (décroissante) et la fonction f change de signe, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\beta \in]0\ ;\ 2]$ tel que $f(\beta) = 0$

• Sur $[2\ ;+\infty[$, la fonction f est continue (car dérivable), monotone (croissante) et la fonction f change de signe, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in [2\ ;+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$

L'équation $f(x) = 0$ admet donc deux solutions sur $]0\ ;+\infty[$: α et β.

b) On a : $f(2) = 1 - 4\ln 2 \simeq -1,77$ et $f(6) = 9 - 4\ln 6 \simeq +1,83$
donc la fonction f change de signe sur $[2\ ;\ 6]$ donc $\alpha \in [2\ ;\ 6]$

De l'algorithme par dichotomie, on trouve : $4,514 < \alpha < 4,515$ avec 12 itérations

EXERCICE 3 (5 points)

Partie A : modélisation de la partie supérieure du portail

1) a) f est dérivable sur $[0\ ;\ 2]$, car produit, somme et composition dérivable sur $[0\ ;\ 2]$

$$f'(x) = e^{-4x} - 4\left(x + \frac{1}{4}\right)e^{-4x} = (1 - 4x - 1)\,e^{-4x} = -4xe^{-4x}$$

b) $\forall x \in]0\ ;\ 2]$, $-4x < 0$ et $e^{-4x} > 0$, donc $f'(x) < 0$

La fonction f est donc décroissante sur $[0\ ;\ 2]$

2) Comme la fonction f est décroissante sur $[0\ ;\ 2]$, son maximum est donné par $f(0)$

$$f(0) = 1,5 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{4} + b = \frac{3}{2} \quad\Leftrightarrow\quad b = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

Partie B : détermination d'une aire

1) $F'(x) = -\frac{1}{4}e^{-4x} - 4\left(-\frac{x}{4} - \frac{1}{8}\right)e^{-4x} + \frac{5}{4} = e^{-4x}\left(-\frac{1}{4} + x + \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{4} = \left(x + \frac{1}{4}\right)e^{-4x} + \frac{5}{4} = f(x)$

Comme $F' = f$, la fonction F est une primitive de f

2) Pour calculer l'aire $\mathscr{A}$ du ventail, il ne faut pas oublier d'enlever le rectangle inférieur de hauteur 0,05 m et de longueur 2 m, car le portail ne va pas jusqu'au sol.

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x - 0,05 \times 2 = F(2) - F(0) - 0,1\\
&= \left[\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)e^{-8} + \frac{5}{2}\right] - \left(-\frac{1}{8}\right) - 0,1 = -\frac{5}{8}e^{-8} + \frac{5}{2} + \frac{1}{8} - 0,1\\
&= -\frac{5}{8}e^{-8} + \frac{21}{8} - 0,1 \simeq 2,52\ \text{m}^2
\end{aligned}$$

Partie C : utilisation d'un algorithme

1) L'écart horizontal entre deux planches est de : $0,12 + 0,05 = 0,17$ m
Comme on numérote les planches à partir de 0, la planche k se trouve à l'abscisse : $0,17\,k$
Ne pas oublier de soustraire le rectangle inférieur de hauteur 0,05 m et de longueur 0,12 m
L'aire $\mathscr{A}_k$ de la planche k vaut donc : $\mathscr{A}_k = 0,12\,[f(0,17k) - 0,05]$

2) • On doit sommer l'aire de toutes les planches. La dernière planche se situe juste avant l'abscisse 2, d'où la condition $X + 0,12 < 2$ soit $X + 0,17 < 2,05$.

• On rentre auparavant la fonction f dans la calculatrice.

- On trouve alors $S \simeq 1,83$

Variables : Les nombres X et S sont des nombres réels
Entrées et initialisation
  On affecte à S la valeur 0
  On affecte à X la valeur 0
Traitement
  tant que $X + 0,17 < 2,05$ **faire**
    S prend la valeur $S + 0,12\,[f(X) - 0,05]$
    X prend la valeur $X + 0,17$
  fin
Sorties : On affiche S

EXERCICE 4 (5 points)

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : ROC

On sait que pour tout réel $a > 0$, et pour tout naturel n : $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

On pose alors $q = 1 + a$ comme $a > 0$ alors $q > 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + na = +\infty$ donc par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

$u_n = u_0 q^n$, comme $u_0 > 0$, par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Donc (u_n) diverge vers $+\infty$

Partie B

1) $f'(x) = \dfrac{4}{(x+2)^2}$ donc $\forall x \in [0\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$

La fonction f est donc croissante sur $[0\,;+\infty[$

2) Pour $x \neq -2$, on a les équivalences suivantes :

$$f(x) = x \Leftrightarrow 5 - \frac{4}{x+2} = x \Leftrightarrow 5(x+2) - 4 = x(x+2) \Leftrightarrow 5x + 10 - 4 = x^2 + 2x \Leftrightarrow x^2 - 3x - 6 = 0$$

$\Delta = 9 + 24 = 33$ donc la racine positive est $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{33}}{2} \simeq 4,37$

3) a) On pose : (P_n) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$

Initialisation : On a $u_0 = 1$ et $u_1 = f(1) = 5 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{11}{3} \simeq 3,67$

On a donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \alpha$. La propriété est initialisée.

Hérédité : On suppose que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$, montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$
Comme la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $f(\alpha) = \alpha$, on a les équivalences suivantes :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha \quad\Leftrightarrow\quad f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(\alpha) \quad\Leftrightarrow\quad 0 \leqslant 3 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$$

La proposition est donc héréditaire.

Par initialisation et hérédité, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$

b) La suite est croissante car $u_n \leqslant u_{n+1}$ et majorée par α, d'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) est donc convergente vers $\ell \leqslant \alpha$

De plus, comme la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f(\alpha) = \alpha$, d'après le théorème du point fixe $\ell = \alpha$

4) a) On calcule $u_2 = f(u_1) = 5 - \dfrac{4}{\dfrac{11}{3}+2} = 5 - \dfrac{4}{\dfrac{17}{3}} = 5 - \dfrac{12}{17} = \dfrac{73}{17}$. On a alors :

$$S_0 = u_0 = 1 \quad , \quad S_1 = u_0 + u_1 = 1 + \frac{11}{3} = \frac{14}{3} \simeq 4,67,$$
$$S_2 = u_0 + u_1 + u_2 = \frac{14}{3} + \frac{73}{17} = \frac{457}{51} \simeq 8,96$$

b) On sait que la suite (u_n) est croissante, donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant u_0 = 1$, donc comme S_n possède $(n+1)$ termes :
$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \geqslant n+1,\ \lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$ par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

EXERCICE 4 (5 points)

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1) • Comme un nombre premier est supérieur ou égal à 2, donc $E > 2$

• Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, il existe deux relatifs $u = -1$ et $v = \dfrac{p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n}{p_i}$ tels que :
$E = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1 \quad \Leftrightarrow \quad p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n - E = 1 \quad \Leftrightarrow \quad u \times E + v \times p_i = 1$

D'après le théorème de Bézout, E est premier avec p_i, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

2) D'après le critère d'arrêt, E admet un diviseur premier, comme cela ne peut être p_1, p_2, …, p_n, E est donc divisible par un nombre premier autre que p_1, p_2,…, p_n ce qui est contradictoire avec la proposition de départ. Il existe donc une infinité de nombres premiers.

Partie B

1) a) On a le tableau suivant :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M_k	3	7	15	31	63	127	255	511	1 023

b) D'après le tableau suivant, pour $k = 2,\ 3,\ 5,\ 7,$ on trouve respectivement $M_k = 3,\ 7\ 31,\ 127$ qui sont premier. On peut donc conjecturer que si k est premier alors M_k est premier.

2) a) $S = 1+2^p+(2^p)^2+\cdots+(2^p)^{q-1}$ est la somme des q premiers termes d'une suite géométrique de raison $q = 2^p$ et de 1^er^ terme 1. On a donc :

$$S = 1 \times \frac{1-(2^p)^q}{1-2^p} = \frac{(2^p)^q - 1}{2^p - 1}$$

b) On a donc $(2^p)^q - 1 = (2^p - 1) \times S$ donc $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$.

c) Si k n'est pas premier, il admet un diviseur premier p tel que $k = pq$ avec $q > 1$. Le nombre M_k est alors divisible par $2^p - 1 \neq M_k$. M_k n'est donc pas premier.

3) a) $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2\,047 = 23 \times 89$, donc M_{11} n'est pas premier.

b) La conjecture émise à la question 1b) est fausse, car il existe un nombre premier 11 pour lequel M_{11} n'est pas premier.

Partie C

1) Pour $n = 5$, on a $M_5 = 31$ et $u_{n-2} = u_3$
Il faut donc calculer u_3 :
$u_1 = u_0^2 - 2 = 4^2 - 2 = 14$, $u_2 = u_1^2 - 2 = 14^2 - 2 = 194$, $u_3 = u_2^2 - 2 = 194^2 - 2 = 37\,634$
or $u_3 = 37\,634 = 11 \times 1\,214$ on a donc $u_3 \equiv 0\ [M_5]$

2) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

L'algorithme suivant, qui est incomplet, doit permettre de vérifier si le nombre de Mersenne M_n est premier, en utilisant le test de Lucas-Lehmer.

```
Variables : u, M, n et i   entiers naturels
Entrées et initialisation
  | u prend la valeur 4
Traitement
  | M prend la valeur 2^n − 1
  | pour i allant de 1 à n − 2 faire
  |   | u prend la valeur u^2 − 2
  | fin
Sorties : si M divise u alors
  | afficher « M est premier »
sinon
  | afficher « M n'est pas premier »
fin
```