Devoir à rendre pour le lundi 4 janvier 2016

Exercice I

Equations et inéquation **(6 points)**

1) Résoudre les équations suivantes en ayant soin de déterminer l'ensemble sur lequel votre calcul est valable. On visualisera cet ensemble sur une droite orientée.

   a) $\ln(3x-4) = \ln(2x+1)$ b) $\ln(x^2-3x-2) = \ln(2x-6)$

2) Résoudre les inéquations suivantes en ayant soin de déterminer l'ensemble sur lequel votre calcul est valable. On visualisera l'ensemble solution sur une droite orientée.

   a) $\ln(5x+20) > \ln(3x-2)$ b) $\ln(x^2-5x-14) \geqslant \ln(2x^2-10x+8)$

3) On cherche le plus petit entier n tel que : $e^{-0,18\,n} < 10^{-3}$
   a) Résoudre cette inéquation algébriquement.
   b) Proposer une vérification algorithmique de votre résultat.

Exercice II

Exponentielle et logarithme népérien **(9 points)**

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = e^x - \ln x$

On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. On pourra utiliser le résultat : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

1) a) Étudier les variations de la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $g(x) = xe^x - 1$
   b) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$
   c) Montrer que l'équation $xe^x = 1$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}_+$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}
   d) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.
2) a) Déterminer la limite de f en 0.
   b) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = e^x\left(1 - \dfrac{x}{e^x} \times \dfrac{\ln x}{x}\right)$.
   En déduire la limite de f en $+\infty$
   c) Déterminer f' et montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.
   d) En déduire les variations de f sur $]0\,;+\infty[$ puis dresser son tableau de variation.
   e) Montrer que f admet un minimum $m = f(\alpha)$ et que $m = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$
   Justifier que : $2,32 \leqslant m \leqslant 2,34$
3) Donner une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
4) Sur l'annexe 1, à rendre avec la copie, tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ et la tangente T

Exercice III

Fonction retorse **(5 points)**

Soit la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 2,2x + 2,2\ln(x+1)$

1) Visualiser, sur la calculatrice, la courbe $\mathscr{C}_f$ en prenant comme fenêtre $X \in [-2\,;\ 4]$ et $Y \in [-5\,;\ 5]$

   Reproduire sur l'annexe 2, à rendre avec la copie, l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ obtenue sur la calculatrice.

2) À partir de cette représentation graphique, quelles conjectures peut-on faire :
   a) Sur les variations de la fonction f.
   b) Sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

3) On se propose maintenant d'étudier la fonction f.
   a) Calculer la dérivée f'. On rappelle que : $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
   b) En déduire le sens de variation de la fonction f.
   c) Étudier les limites en -1 et en $+\infty$.
   d) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   e) Déduire de cette étude, en précisant le raisonnement, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
   f) Les résultats aux questions 3) b) et 3) e) confirment-ils les conjectures émises à la question 2) ?

4) On veut représenter, sur l'écran d'une calculatrice, la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle $[-0,1\,;\ 0,2]$, de façon à visualiser les résultats de la question 3).

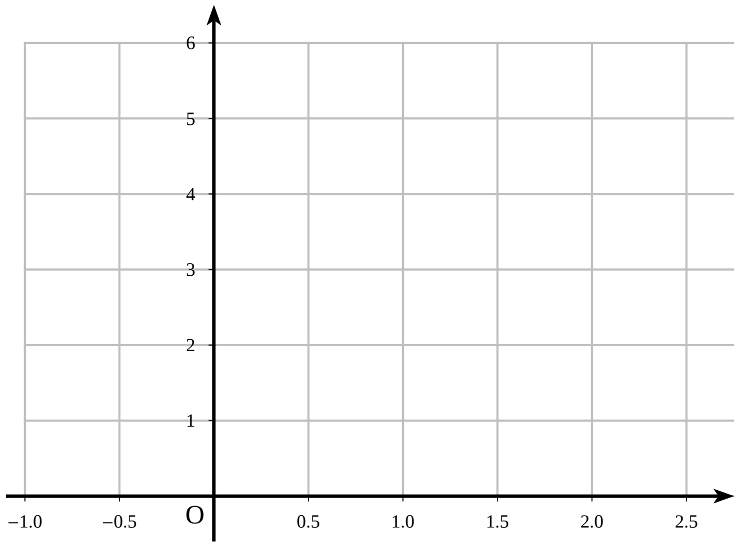
   Quelles valeurs extrêmes de l'ordonnée Y proposez-vous pour mettre en évidence les résultats de la question 3) c) dans la fenêtre de votre calculatrice ?

   Vérifier le ensuite sur votre calculatrice.

Nom :

Prénom :

Annexe 1



Annexe 2