Correction du devoir du lundi 4 janvier 2016

EXERCICE I

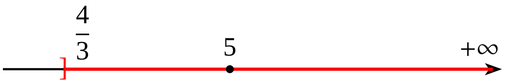
Équations et inéquation **(6 points)**

1) a) $\ln(3x-4) = \ln(2x+1)$

Conditions : $\begin{cases} 3x-4>0 \\ 2x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{4}{3} \\ x > -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow D_f = \left]\dfrac{4}{3} \,;+\infty\right[$

$x \in D_f$, la fonction ln étant monotone sur $]0\,;+\infty[$, on a :

$$3x-4 = 2x+1$$
$$x = 5 \in D_f$$



$S = \{5\}$

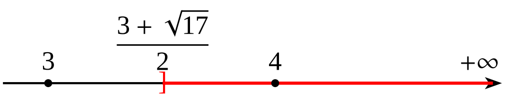
b) $\ln(x^2-3x-2) = \ln(2x-6)$

Conditions : $\begin{cases} x^2-3x-2>0 \\ 2x-6>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left]-\infty\,; \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\right[\cup \left]\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\,;+\infty\right[\\ x > 3 \end{cases}$

$\Rightarrow D_f = \left]\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\,;+\infty\right[$ avec $\dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \approx 3,56$

$x \in D_f$, la fonction ln étant monotone sur $]0\,;+\infty[$, on a :

$$x^2-3x-2 = 2x-6$$
$$x^2-5x+4 = 0$$
$$x_1 = 1 \notin D_f \text{ et } x_2 = 4 \in D_f$$



$S = \{4\}$

2) a) $\ln(5x+20) > \ln(3x-2)$

Conditions : $\begin{cases} 5x+20>0 \\ 3x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x > \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow D_f = \left]\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$

$x \in D_f$, la fonction ln étant croissante sur $]0\,;+\infty[$, on a :

$$5x+20 > 3x-2$$
$$x > -11$$

$S = D_f = \left]\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$

b) $\ln(x^2 - 5x - 14) \geqslant \ln(2x^2 - 10x + 8)$

Racines de $x^2 - 5x - 14$

$\Delta = 25 + 56 = 81 = 9^2$

$x_1 = \dfrac{5+9}{2} = 7$

$x_2 = \dfrac{5-9}{2} = -2$

Racines de $2x^2 - 10x + 8$

$\Delta = 100 - 64 = 36 = 6^2$

$x_1 = \dfrac{10+6}{4} = 4$

$x_2 = \dfrac{10-6}{4} = 1$

Conditions : $\begin{cases} x^2 - 5x - 14 > 0 \\ 2x^2 - 10x + 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty\,;-2[\cup]7\,;+\infty[\\ x \in]-\infty\,;1[\cup]4\,;+\infty[\end{cases}$

$D_f =]-\infty\,;-2[\cup]7\,;+\infty[$

$x \in D_f$, la fonction ln étant croissante sur $]0\,;+\infty[$, on a :

$$x^2 - 5x - 14 \geqslant 2x^2 - 10x + 8$$
$$-x^2 + 5x - 22 \geqslant 0$$
$$\Delta = 25 - 88 = -63$$
$$-x^2 + 5x - 22 < 0, \quad \forall x \in D_f$$

impossible, $S = \varnothing$

3) a) On compose avec la fonction ln :

$$e^{-0,18\,n} < 10^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad -0,18n < \ln 10^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{3\ln 10}{0,18} \approx 38,37$$

Le plus petit entier n est donc 39.

b) On peut proposer l'algorithme suivant pour vérifier la solution.

Variables : N : entier
Entrées et initialisation
  $0 \to N$
Traitement
  tant que $e^{-0,18N} \geqslant 10^{-3}$ **faire**
    $N + 1 \to N$
  fin
Sorties : Afficher N

Exercice II

Exponentielle et logarithme népérien **(9 points)**

1) a) $g'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$

Si $x \geqslant 0$, $x + 1 > 0$ et $e^x > 0$ donc $g'(x) > 0$

La fonction g est donc croissante sur $[0\,;+\infty[$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par produit et somme} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty\end{array}$$

c) Sur $[0\,;+\infty[$, la fonction g :

- est continue car dérivable,
- monotone (croissante),
- g change de signe car $g(0) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule une seule fois en α sur $[0\,;+\infty[$. On a donc $g(\alpha) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha e^{\alpha} = 1$

Pour trouver un encadrement de α, on peut calculer $g(1) = e - 1 \approx 1,718$, donc $\alpha \in [0\,;\,1]$.

Par l'algorithme de dichotomie, on trouve $0,566 < \alpha < 0,567$ avec 10 itérations.

d) Comme la fonction g est croissante sur $[0\,;+\infty[$, on a :

si $x < \alpha$, $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$, $g(x) > 0$

2) a) Déterminer la limite de f en 0.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} -\ln x = +\infty\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par somme} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty\end{array}$$

b) On vérifie aisément l'égalité, on a alors :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{par quotient} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \text{ donc par produit et somme } \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{x}{e^x} \times \frac{\ln x}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \text{ par produit } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

c) $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{xe^x - 1}{x} = \dfrac{g(x)}{x}$

d) Sur $]0\,;+\infty[$, $x > 0$ donc f' est du signe de g.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

e) D'après le tableau de variation, f admet comme minimum $m = f(\alpha)$

Comme $\alpha e^{\alpha} = 1$ alors $e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$ et $\alpha = \dfrac{1}{e^{\alpha}}$

donc $m = e^{\alpha} - \ln\alpha = \dfrac{1}{\alpha} - \ln\dfrac{1}{e^{\alpha}} = \dfrac{1}{\alpha} + \ln e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha} + \alpha$

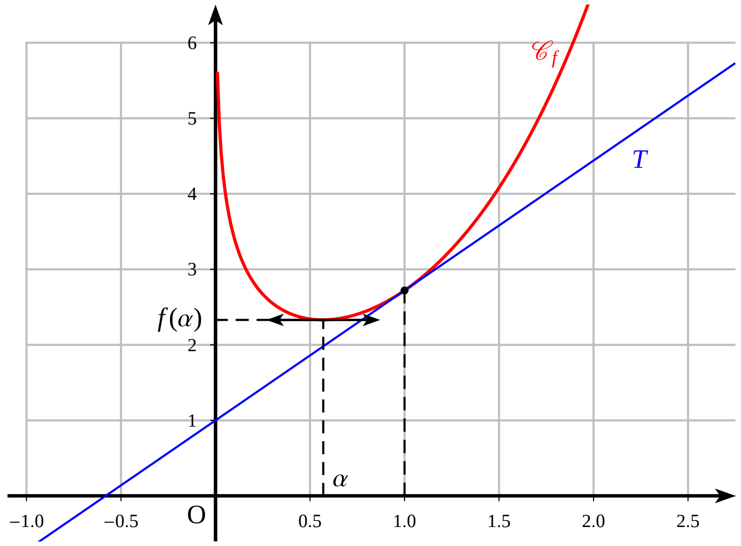
Comme $0,566 < \alpha < 0,567$ alors $\dfrac{1}{0,567} < \dfrac{1}{\alpha} < \dfrac{1}{0,566}$ soit $1,763 < \dfrac{1}{\alpha} < 1,767$

Par somme $2,329 < \alpha + \dfrac{1}{\alpha} < 2,334$ donc $2,32 < m < 2,33$

3) T : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ or $f'(1) = e - 1$ et $f(1) = e$

donc $y = (e-1)x + e \Leftrightarrow y = (e-1)x + 1$

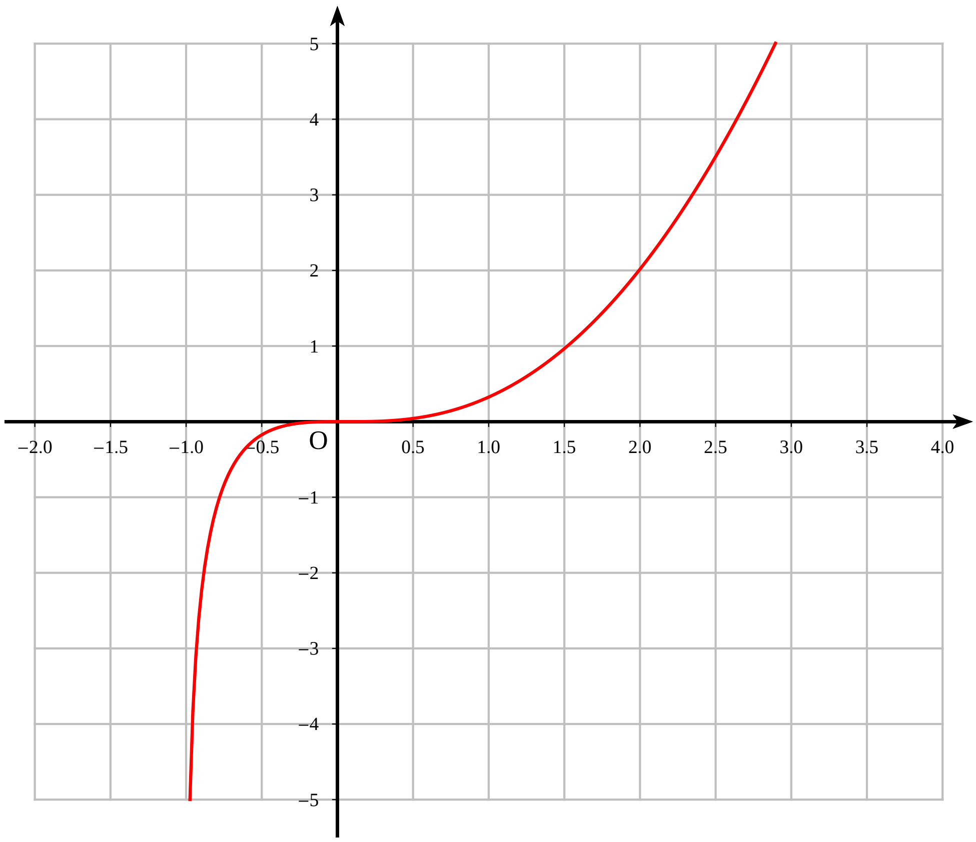
4) On obtient la courbe suivante :



Exercice III

Fonction retorse **(5 points)**

1) On obtient la courbe suivante :



2) À partir de cette représentation graphique, on peut conjecturer que :

a) f est croissante sur $]-1\,;+\infty[$,

b) que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $x = 0$.

3) a) $f'(x) = 2x - 2,2 + \dfrac{2,2}{x+1} = \dfrac{(2x-2,2)(x+1)+2,2}{x+1} = \dfrac{2x^2+2x-2,2x-2,2+2,2}{x+1}$

$$= \frac{2x^2-0,2x}{x+1} = \frac{2x(x-0,1)}{x+1}$$

b) $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \;\text{ ou }\; x = 0,1$

Comme $x > -1$, $\; x+1 > 0\;$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $x(x-0,1)$

- Si $x \in]-1\,;\,0[\,\cup\,]0,1\,;+\infty[$, $\; f'(x) > 0\;$ donc f est croissante.
- Si $x \in]0\,;\,0,1[$, $\; f'(x) < 0\;$ donc f est décroissante.

c) • Limite en -1

$$\lim_{x\to -1} x^2 - 2,2x = 3,2$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to -1^+} x+1 = 0^+\\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l}\text{Par composition}\\ \displaystyle\lim_{x\to -1^+} \ln(x+1) = -\infty\end{array}$$

Par produit et somme $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$

• Limite en $+\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} x^2 - 2,2x = \lim_{x\to +\infty} x^2\left(1 - \frac{2,2}{x}\right) = +\infty \quad \text{(par produit)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x+1 = +\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l}\text{Par composition}\\ \displaystyle\lim_{x\to +\infty} \ln(x+1) = +\infty\end{array}$$

Par produit et somme $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

d) On obtient le tableau de variation suivant :

x	-1		0		$0,1$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(0,1)$	$\nearrow$	$+\infty$

e) L'équation $f(x) = 0$ admet une solution évidente $x = 0$

D'après le tableau de variation, on a $f(0,1) < 0$, donc sur $]0,1\,;+\infty[$:

- f est continue car dérivable,
- f est monotone (croissante),
- f change de signe car $f(0,1) < 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc une deuxième solution $\alpha \in [0,1\,;+\infty[$ à l'équation $f(x) = 0$

Il existe donc deux solutions à l'équation $f(x) = 0$

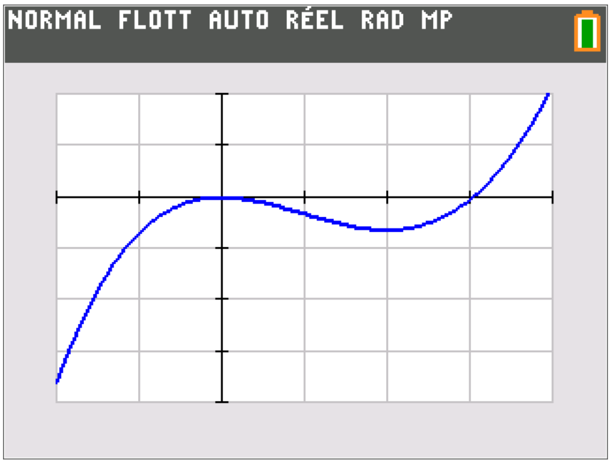
f) Les questions 3) b) et 3) e) contredisent les conjectures de la question 2).

4) Une valeurs approchée de $f(0,1) = -3,17 \times 10^{-4}$

Comme cette valeur est très petite, dans la première visualisation cette valeur était confondue avec 0. Ceci explique les conjectures erronées.

Pour trouver la visualisation sur $]-0,1\ ;\ 0,2[$, on calcule les valeurs extrêmes : $f(-0,1) \approx -0,0018$ et $f(0,2) \approx 0,001$.
On peut proposer comme intervalle pour Y : $[-0,002\ ;\ 0,001]$

On obtient alors la visualisation suivante sur la calculatrice :
$X_{\text{grad}} = 0,05$ et $Y_{\text{grad}} = 5 \times 10^{-4}$



On remarque que la deuxième solution de l'équation $f(x) = 0$ est proche de 0,15