Correction contrôle de mathématiques

Du lundi 30 mai 2016

EXERCICE 1

Cube et plan **(8 points)**

1) a) $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $I\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,0\right)$, $J\left(0\,;\,1\,;\,\frac{1}{2}\right)$, $K\left(\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,1\right)$.

b) Calculons :

$$\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0$$

$$\overrightarrow{IK}\cdot\overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 - 1 + 1 = 0$$

$\overrightarrow{CE}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) donc $\overrightarrow{CE}$ est un vecteur normal du plan (IJK).

2) a) Une droite d est parallèle à un plan ($\mathscr{P}$) si, et seulement si, un vecteur directeur de d est orthogonale à un vecteur normal de ($\mathscr{P}$).

b) $$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - 1 + 0 = 0$$

donc le vecteur $\overrightarrow{BD}$ est orthogonal à un vecteur normal du plan (IJK) donc la droite (BD) est parallèle au plan (IJK).

3) a) Soit $M(x\,;\,y\,;\,z)$, on a :

$$\overrightarrow{CM} = t\overrightarrow{CE} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=-t \\ y-1=-t \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-t \\ y=1-t \\ z=t \end{cases}$$

Les coordonnées de M sont : $(1-t\,;\,1-t\,;\,t)$

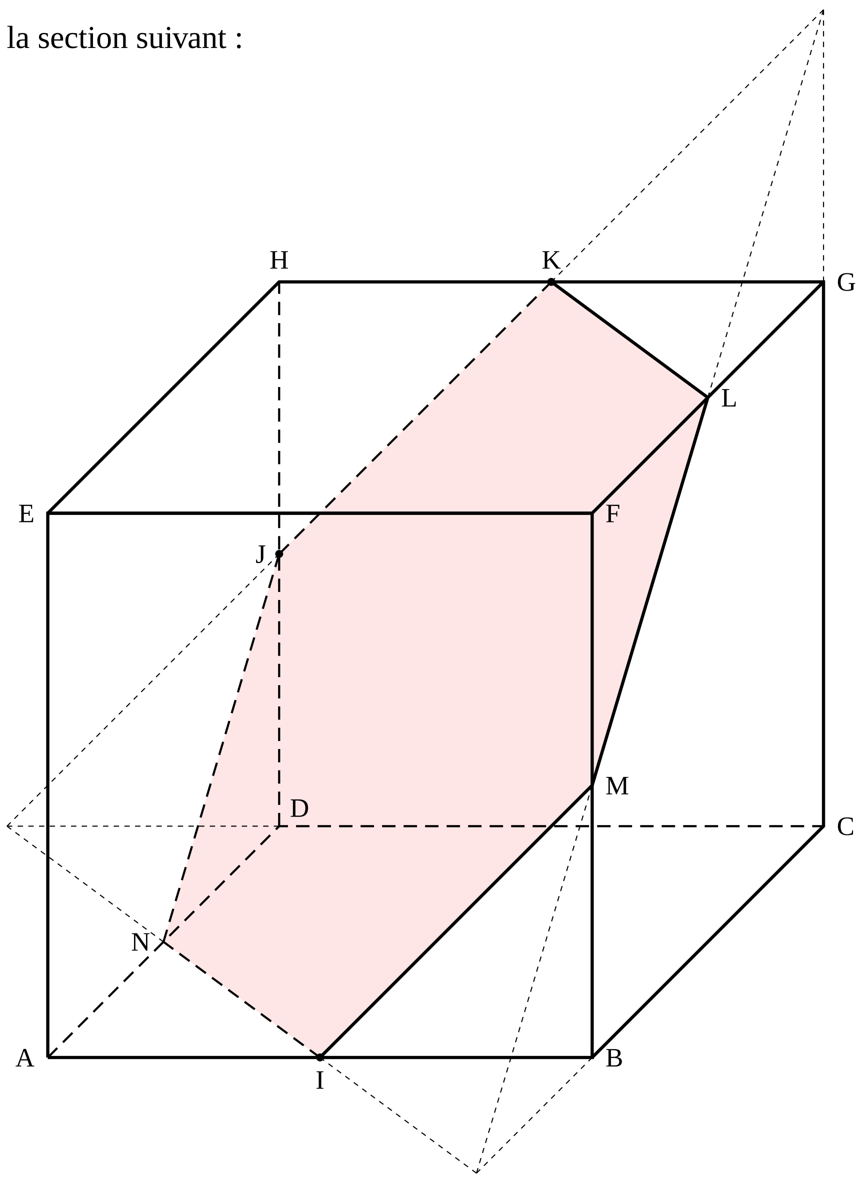
b) Les plan (BDM) et (IJK) sont parallèles si, et seulement si, un vecteur normal du plan (IJK) est normal au plan (BDM).

Le vecteur $\overrightarrow{CE}$ est un vecteur normal du plan (IJK) et l'on sait que le vecteur $\overrightarrow{BD}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{CE}$. Pour que $\overrightarrow{CE}$ soit un vecteur normal du plan (BDM), il reste à déterminer les coordonnées de M pour que le vecteur $\overrightarrow{BM}$ soit orthogonal au vecteur $\overrightarrow{CE}$:

$$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CE} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -t \\ 1-t \\ t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow t - 1 + t + t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$$

Les coordonnées de M sont : $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

4) a) On obtient la section suivant :



b) Comme les faces DCGH et ABFE sont parallèles, le plan (IJK) coupe ces deux faces en deux droites parallèles. On a alors : (JK) // (IM) (1).

Dans le triangle DGH, J et K sont les milieux respectifs des segments [DH] et [HG] donc, d'après le théorème des milieux, (JK) // (DG) et $\text{JK} = \dfrac{1}{2}\text{DG}$.

D'après (1), (IM) // (DG) et donc (IM) // (AF). Comme I est le milieu de [AB], d'après le théorème des milieux $\text{M} = m[\text{BF}]$ et $\text{IM} = \dfrac{1}{2}\text{AF}$.

On a donc JK = IM. En réitérant ce procédé, on montre de même que les points N et L sont les milieux respectifs des segments [AD] et [FG]. Les six côtés de l'hexagone sont alors de même longueur, la section du plan (IJK) et du cube ABCDEFGH est donc un hexagone régulier.

Exercice 2

Vrai-faux **(7 points)**

Affirmation 1 : vraie Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}(4\,;-1\,;\,2)$

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 4 + 0 - 4 = 0$$

donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux et donc les droites Δ et (AC) sont orthogonales.

Affirmation 2 : vraie $\overrightarrow{AB}(-4\,;\,3\,;-7)$ et $\overrightarrow{AC}(1\,;\,0\,;-2)$.

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont manifestement pas proportionnelles donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et ainsi les points A, B et C déterminent un plan.

Montrons que les coordonnées des points A, B et C verifient l'équation : $2x+5y+z-5 = 0$.

- Pour A : $2x + 5y + z - 5 = 6 - 5 + 4 - 5 = 0$
- Pour B : $2x + 5y + z - 5 = -2 + 10 - 3 - 5 = 0$
- Pour C : $2x + 5y + z - 5 = 8 - 5 + 2 - 5 = 0$

Le plan (ABC) a pour équation cartésienne : $2x + 5y + z - 5 = 0$

Affirmation 3 : fausse Si la représentation paramétrique donnée est celle du plan $\mathscr{P}$ alors ces coordonnées paramétrées doivent vérifier l'équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ pour tous s et s' de $\mathbb{R}$. Vérifions le :

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 2z - 7 &= 2(1 + s - 2s') - 3(1 - 2s + s') + 2(1 - 4s + 2s') - 7 \\ &= 2 + 2s - 4s' - 3 + 6s - 3s' + 2 - 8s + 4s' - 7 \\ &= -3s' - 6 \end{aligned}$$

Cette quantité n'est pas nulle pour tout s' de $\mathbb{R}$, donc la représentation paramétrique donnée n'est pas celle du plan $\mathscr{P}$.

Affirmation 4 : fausse S'il existe un plan parallèle au plan $\mathscr{P}$ contenant Δ, un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ doit être orthogonal à un vecteur directeur de la droite Δ.

$\mathscr{P}$: $2x - 3y + 2z - 7 = 0$, donc un vecteur normal à $\mathscr{P}$ est : $\vec{n}(2\,;-3\,;\,2)$.

Un vecteur directeur de Δ est : $\vec{u}(4\,;-1\,;\,2)$.

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 8 + 3 + 4 = 15$$

$\vec{n} \cdot \vec{u} \neq 0$ donc les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{u}$ ne sont pas orthogonaux, donc il n'existe pas un plan parallèle au plan $\mathscr{P}$ contenant Δ.

EXERCICE 3

Dépistage d'une maladie **(5 points)**

1) a) $P(T > 60) = \text{NormalFrép}(60\,,\,1\text{E}99\,;\,40\,,\,8) \approx 0,006$

La probabilité que le taux dans le sang de la substance Gamma soit supérieur à 60 ng.mL^{-1} est de 0,006.

b) La valeur de μ' est de 50 car il s'agit de personnes malades.

On doit avoir $P(T' < 43) = 0,1$. On pose $Z = \dfrac{T' - \mu'}{\sigma'}$.

Z suit la loi normale centrée réduite :

$$P(T' < 43) = 0,1 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(Z < \frac{43-50}{\sigma'}\right) = 0,1 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(Z < -\frac{7}{\sigma'}\right) = 0,1 \quad \Leftrightarrow$$
$$-\frac{7}{\sigma'} = \Phi^{-1}(0,1) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{7}{\sigma'} \approx -1,282 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma' \approx \frac{7}{1,282} \approx 5,46.$$

2) a) On a $p = 0,82$.

L'approximation normale est vérifiée pour ce groupe de $n = 300$ personnes car :

$n = 300 \geqslant 30 \quad np = 300 \times 0,82 = 246 \geqslant 5 \quad n(1-p) = 300 \times 0,18 = 54 \geqslant 5.$

b) $\mathrm{I}_{300} = \left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \ ; \ p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = [0,77 \ ; \ 0,87]$

c) La fréquence observée dans ce groupe est de : $f_{\text{obs}} = 0,74$

$f_{\text{obs}} \notin \mathrm{I}_{300}$, on doit donc rejeter l'hypothèse que le fait de n'être pas à jeun n'a pas d'influence sur le dépistage de la maladie.