

Contrôle de mathématiques

Lundi 28 septembre 2015

EXERCICE 1

Variation d'une suite

(3 points)

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $u_n = 2 - \frac{3}{n^2 + 1}$

- 1) Montrer que pour tout entier naturel on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{6n + 3}{(n^2 + 1)[(n + 1)^2 + 1]}$
- 2) En déduite la monotonie de la suite (u_n)

EXERCICE 2

Algorithme

(4 points)

Soit la suite définie pour $n \geq 1$ par : $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - n$

- 1) Calculer les termes u_1, u_2 et u_3 . On donnera les valeurs approchées à 10^{-3} près.
- 2) Montrer que pour $n \geq 1$ on a : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1$
- 3) Compléter les pointillés de l'algorithme ci-contre de façon à ce qu'il donne la valeur de u_n, n étant donné.
- 4) Rentrer cet algorithme dans votre calculatrice puis remplir le tableau suivant en donnant les valeurs à 10^{-3} près :

Variables : N, I entiers
 U réel

Entrées et initialisation

| Lire N

| $\dots \rightarrow U$

Traitement

| **pour** I variant de \dots à N **faire**

| | $U + \dots \rightarrow U$

| **fin**

Sorties : Afficher \dots

N	5	10	20	50
U				

- 5) Quelle conjecture peut-on faire en ce qui concerne la monotonie de la suite et de sa limite ?

EXERCICE 3

ROC et suite arithmétique

(4 points)

- 1) Déterminer que pour $n \geq 1$ on a : $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$
- 2) Soit une suite (u_n) arithmétique définie sur \mathbb{N} telle que : $u_5 = 125$ et $u_{16} = 48$
 - a) Déterminer la raison r et le premier terme u_0 de la suite (u_n) .
 - b) À partir de quel rang a-t-on $u_n \leq -127$?
 - c) Calculer la somme suivante : $S = 160 + 153 + 146 + \dots + 6$

EXERCICE 4

Intensité lumineuse

(4 points)

En traversant une plaque de verre teintée, un rayon lumineux perd 23 % de son intensité lumineuse.

- 1) Soit I_0 l'intensité d'un rayon lumineux à son entrée dans la plaque de verre et I_1 son intensité à la sortie. Exprimer I_1 en fonction de I_0 .
- 2) On superpose n plaques de verre identiques ; on note I_n l'intensité du rayon à la sortie de la n -ième plaque.
 - a) Exprimer I_n en fonction de I_{n-1} .
 - b) Quelle est la nature de la suite (I_n) ?
Déterminer l'expression de I_n en fonction de n et de I_0 .
 - c) Quel est le sens de variation de (I_n) ?
- 3) Quelle est l'intensité initiale (à l'unité près) d'un rayon dont l'intensité après avoir traversé 4 plaques est égale à 15,5 cd (candela) ?
- 4) Calculer le nombre minimum de plaques qu'un rayon doit avoir traversé pour que son intensité sortante soit inférieure ou égale au quart de son intensité entrante ?

EXERCICE 5

Suite récurrente à deux termes

(5 points)

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = 1,5u_{n+1} - 0,5u_n$

- 1) Calculer u_2 , u_3 et u_4 .
- 2) Écrire un algorithme qui permette de calculer u_n , $n \geq 2$ étant donné.
- 3) a) Rentrer cet algorithme sur votre calculette et remplir le tableau suivant en donnant les valeurs à 10^{-3} près :

n	5	10	50
u_n			

- b) Quelle conjecture peut-on faire en ce qui concerne les variations et la limite de la suite (u_n) ?
- 4) On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,5. En déduire l'expression de v_n en fonction de n .
- 5) On admet que $u_n = 2(1 - 0,5^n) + 1$. Retrouver la conjecture faites à la question 3b).